



Berekenen en ontwerpen
van eenvoudige
constructies van
bouwwerken

V.G. Keijzers

Mechanica + constructie 1

Evenwicht en eenheden



1.1 De beide kantoorgebouwen Puerta de Europe in Madrid staan onder een hoek van 15° en zijn elk in evenwicht.



1.2 Nieuwe Betlembrug bij Muiden over het Amsterdam-Rijnkanaal. Ook tijdens de bouw moet een constructie in evenwicht zijn.

Bouwwerken – of het nu gaat om bijvoorbeeld een kantoorgebouw of een verkeersbrug (afb. 1.1 en 1.2) – moeten in evenwicht zijn. Maar wat betekent ‘in evenwicht zijn’ in de bouwpraktijk? In constructieberekeningen wordt het evenwicht beschreven met drie evenwichtsvergelijkingen. In dit hoofdstuk wordt het evenwicht ook beschouwd vanuit ‘het in balans’ zijn; een situatie die iedereen in het dagelijkse leven regelmatig ervaart.

In elke constructieve berekening moet het evenwicht worden aangetoond. De draagconstructie zal dat evenwicht moeten garanderen door weerstand te bieden aan alle er op in werkende krachten. In de bouwpraktijk worden die krachten belastingen genoemd.

De wetten van Newton – genoemd naar de Engelse natuur- en wiskundige Isaac Newton (1643-1727) – vormen de natuurkundige basis voor het berekenen van alle krachten op en in een constructie. Dit boek gaat uit van krachten in *statische* toestand, dat wil zeggen dat de constructie niet beweegt, en dus stilstaat. Het bepalen van het evenwicht van bewegende ofwel *dynamische* krachten is een stuk lastiger. Daarom worden dynamische krachten in de praktijk vaak vertaald naar statische krachten. Voorbeelden zijn windbelasting op een gebouw en remkrachten op een brug.

De eenheid van kracht is newton, volgens het internationale stelsel van eenheden (SI of *Système Internationale d’unités*). Ook andere grootheden worden uitgedrukt in eenheden van het SI-stelsel. Belangrijk is deze eenheden te kennen en consequent te hanteren.

Naast correct gebruik van eenheden moet je je bewust zijn van de nauwkeurigheid van de uitkomst van een formule. Welke getalsgrootte daarbij hoort wordt ook in dit hoofdstuk beschreven.

1.1 Wetten van Newton

De toegepaste mechanica is gebaseerd op de vier wetten van Newton: de eerste, de tweede, de derde én de gravitatiewet. Voor het in evenwicht zijn van een constructie zijn deze vier wetten gelijktijdig van toepassing.

	grootheid en dimensie	symbool	SI-eenheid	symbool	opmerking
basisgrootheid	lengte	L	meter	m	
	massa	m	kilogram	kg	1 ton = 1000 kg
	tijd	t	seconde	s	
	temperatuur	T	kelvin	K	0 °C = 273 K
afgeleide grootheid	kracht	F	newton	N	1 N = 1 kg·m/s ²

1.12 De vijf grootheden die voor bouwconstructies het meest van belang zijn.

grootheid	symbool	eenheid	opmerking
kracht	F	kN	puntlast
belasting per m	q	kN/m	lijnlast
belasting per m ²	p	kN/m ²	vlaklast of verdeelde belasting (in de Eurocode wordt deze belasting aangeduid met q)
moment	M	kNm	
oppervlakte	A	mm ²	
spanning	σ of f	N/mm ²	s voor optredende spanning of voor spanning in het algemeen; f voor opneembare spanning (materiaalsterkte)
elasticiteitsmodulus	E	N/mm ²	
traagheidsmoment	I	mm ⁴	ook wel lineair kwadratisch oppervlaktemoment genoemd
weerstandsmoment	W	mm ³	
rek	ε	[-] in % of ‰	let op: % of ‰ is géén eenheid maar een verscaling om (kleine) verhoudingsgetallen gemakkelijk uit te kunnen spreken

1.13 In de praktijk gangbare symbolen en bijbehorende eenheden.

is gebaseerd daarvoor te onzeker zijn. Elke constructieve berekening is immers gebaseerd op een groot aantal aannamen. Dat zijn (soms) grove en veilige aannamen van de grootte van de belastingen op de constructie, maar ook veilige aannamen voor de sterkte van de gebruikte materialen. Daarnaast zijn de gebruikte schematiseringen in rekenmodellen veilige vereenvoudigingen van de werkelijkheid. Daarom wordt voor de zwaartekrachtsversnelling een waarde $g = 10 \text{ m/s}^2$ aangehouden (zie paragraaf 1.1).

Het gebruik van meer dan drie cijfers voor een getalweergave creëert daarom een schijnnaauwkeurigheid die (te) ver afstaat van de werkelijkheid. Voeg bij hele grote of bij hele kleine getallen 10^n of 10^{-n} toe of gebruik (eventueel) een andere eenheid.

Voorbeelden van minder goede en (veel) betere notaties in de berekening:

	<i>niet aanbevolen</i>	<i>aanbevolen</i>
kracht	3287,97 kN	3288 kN (eventueel 3290 kN)
kracht	32,8796 kN	32,9 kN
spanning	328,79 N/mm ²	329 N/mm ²
spanning	3,2879 N/mm ²	3,29 N/mm ²
spanning	0,3287 N/mm ²	0,329 N/mm ²
traagheidsmoment	32879759657876 mm ⁴	32,9·10 ¹² mm ⁴
rek:	0,00032879 [-]	0,329 ‰ [-]

Advies 3. Gebruik in formules consequent dezelfde eenheden. Fouten met een factor 1000 zijn snel gemaakt en de gevolgen van een dergelijke fout kunnen catastrofaal zijn. Zeker bij gebrek aan ervaring ontbreekt elke referentie wat de orde van grootte van de uitkomst zou moeten zijn!

Advies 4. Reken in formules alle grootheden om naar newton en naar mm. Dit betekent:

q	in kN/m	=	N/mm
p	in kN/m ²	=	10 ⁻³ N/mm ²
L	in m	=	10 ³ mm
E	in kN/m ²	=	10 ⁻³ N/mm ²
I	in cm ⁴	=	10 ⁴ mm ⁴
M	in kNm	=	10 ⁶ Nmm

Het vermelden van eenheden in een berekening is een absolute vereiste. Een getal zonder vermelding van de eenheid heeft geen betekenis.

1.4 Parate kennisvragen

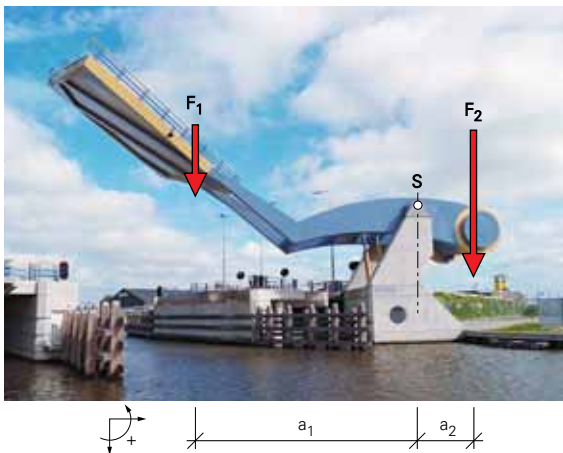
1. Het is wettelijk verplicht in auto's een veiligheidsgordel te dragen. Welke wet van Newton speelt hier een rol? Motiveer het antwoord.
2. De massa van een Formule 1-auto (incl. coureur) bedraagt slechts zo'n 600 kg. Verklaar het voordeel van een lichte auto.
3. Ondanks het bestaan van de gravitatiewet van Newton blijven de aarde en de maan op gelijke afstand van elkaar staan. Verklaar waarom.
4. Een bewoner van een flatgebouw stap in een lift en zet de lift in werking. Verklaar de waarneming (gevoel) van de bewoner in relatie tot de wet(ten) van Newton.
5. Waarom wordt in constructieve berekeningen de zwaartekrachtsversnelling g afgerond op 10 m/s²?
6. Noem de drie evenwichtsvergelijkingen.
7. Beschrijf van elke evenwichtsvergelijking wat deze moet voorkomen.
8. Wat is een koppel en wat is het effect van een koppel?

9. Wat is het verschil tussen een moment en een koppel?
10. Hoe wordt het moment van een koppel berekend?
11. Wat wordt verstaan onder: een grootte, een eenheid, een dimensie en een symbool?
12. Uit welke dimensies bestaat een kracht?
13. In een constructieve berekening moet schijnnaauwkeurigheid worden vermeden. Hoeveel cijfers zijn voor een uitkomst significant en geef aan waarom dat zo is.

1.5 Oefenopgave

1 Een veel voorkomende type beweegbare brug is de basculebrug (afb. 1.14). Zo'n brug is zo uitgebalanceerd dat het brugdek, bestaande uit het val en de hefligger (F_1 , links), precies in evenwicht is met de staartligger en het ballastgewicht (F_2 , rechts). De gewichten, voorgesteld als de krachten F_1 en F_2 grijpen aan in de zwaartepunten. Volgens opgave van het staalconstructiebedrijf bedraagt het gewicht $F_1 = 140$ ton (een oneigenlijke eenheid). De afstanden van de beide krachten in gesloten toestand tot het scharnier S bedragen: $a_1 = 12,8$ m en $a_2 = 3,7$ m.

- a. Bereken de grootte van gewicht F_2 , zodat de brug 'in balans' is.
- b. Bereken de grootte van gewicht F_2 , door gebruik te maken van een evenwichtsvergelijking ten opzichte van scharnier S.
- c. Controleer de grootte van gewicht F_2 met de evenwichtsvergelijking op afstand a_1 ten opzichte van scharnier S (dit is de werklijn van de kracht F_1) en trek hieruit een conclusie.
- d. Bereken de grootte van de verticale kracht op scharnier S, door gebruik te maken van een evenwichtsvergelijking.
- e. Het in beweging zetten van de brug vanuit stilstand kost energie. Welke wet van Newton kan hiermee in verband worden gebracht en beschrijf het effect op de benodigde kracht (energie) wanneer de variabelen in deze wet twee keer zo groot worden.



1.14 Slauerhofbrug over de Harlingervaart in Leeuwarden.

Krachtenleer

Alles op aarde – en dus ook elk bouwwerk – is aan krachten onderhevig (afb. 2.1). De bekendste kracht is de zwaartekracht, maar er kunnen ook krachten optreden door bijvoorbeeld wind, een aardbeving of veroorzaakt door machines. Op een lichaam kunnen tegelijkertijd meerdere krachten werken: het effect van deze verschillende krachten is hetzelfde als dat van de *samengestelde* kracht of resultante. Het omgekeerde is dan ook mogelijk: een kracht kan worden *ontbonden* in twee of meer krachten.

Dit hoofdstuk beschrijft hoe krachten die door één punt gaan en krachten die evenwijdig aan elkaar lopen kunnen worden 'opgeteld' tot één resultante. Dit 'optellen' kan zowel grafisch als analytisch (met een berekening). Grafische methoden worden minder vaak toegepast dan analytische methoden, maar geven wel goed inzicht in de krachtswerking van staafvormige constructies, met name hoe staafkrachten zich onderling verhouden.

Wanneer de grootte en de ligging van de resultante bekend is, is ook de grootte en de ligging van de evenwichtmakende kracht bekend.

Het effect van een kracht (of stelsel van krachten) op een lichaam is een translatie en/of een rotatie. In een evenwichtssituatie heffen alle krachten samen de translatie en de rotatie op: $\Sigma F = 0$ en

$\Sigma M = 0$; zie hoofdstuk 1 (Evenwicht en eenheden).

Voor de beschrijving van het evenwicht ten aanzien van rotatie vormt de momentenstelling van Varignon een belangrijke basis voor het berekenen van de evenwichtmakende krachten ter plaatse van de opleggingen.



2.1 De 600 m hoge Canton Tower in Guangzhou (China) wordt zowel horizontaal (wind) als verticaal (eigen gewicht van constructie, inrichting en aanwezige personen) belast.

2.1 Eigenschappen van een kracht

Een kracht is een vector met een grootte en een richting en wordt weergegeven als een pijl. Een kracht wordt aangeduid met het symbool F (orce). Het begin- of eindpunt waar de kracht aangrijpt heet het aangrijpingspunt (afb. 2.2). Elke kracht heeft een werklijn: dit is een denkbeeldige lijn waarop de kracht werkt. Werklijn en kracht hebben dezelfde richting. Het effect van een kracht op een lichaam is een verplaatsing. Een kracht werkend op een lichaam mag over zijn werklijn worden verplaatst. Dit betekent bijvoorbeeld dat het niet uitmaakt of een kar wordt geduwd of getrokken (afb. 2.3): het effect van de kracht op de kar (grootte en richting van de verplaatsing) is hetzelfde.

2.2 Grafische en analytische methoden

Wanneer er op een lichaam meerdere krachten tegelijkertijd werken, kunnen deze krachten worden samengesteld tot één resulterende kracht F_R . Deze resultante veroorzaakt hetzelfde effect als alle afzonderlijke krachten samen. In afbeelding 2.1 bijvoorbeeld wordt de toren horizontaal belast door de wind en verticaal door de zwaartekracht (eigen gewicht van de constructie en van alle in het gebouw aanwezige (afbouw)materialen, inrichting en personen). Deze twee belastingen worden elk voorgesteld als een kracht en kunnen gelijktijdig optreden.

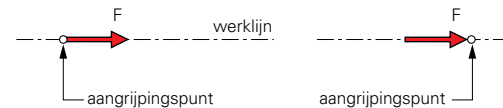
Het doel van het samenstellen van krachten is het bepalen van de grootte en de richting van de resultante. Hiervoor bestaan twee methoden:

- **grafische methode:** alle krachten worden op schaal in een bepaalde (werk) volgorde getekend, waarna door meting de grootte van de resultante volgt;
- **analytische methode:** de grootte van de resultante volgt uit een berekening.

Welke methode het meest geschikt is, hangt af van de ligging van de werklijnen.

- Wanneer de werklijnen van de krachten niet evenwijdig lopen is zowel de grafische methode (krachtenparallellogram en krachtenveelhoek) als de analytische methode (ontbinden in horizontale en verticale krachten en deze samenstellen) geschikt.
- Wanneer de werklijnen van de krachten wel evenwijdig lopen wordt vooral de analytische methode (momentenstelling van Varignon) gebruikt.

Wanneer twee of meer krachten kunnen worden samengesteld tot één kracht (grafisch of analytisch), dan geldt andersom ook: een kracht kan altijd worden ontbonden in twee of meer krachten (grafisch of analytisch).



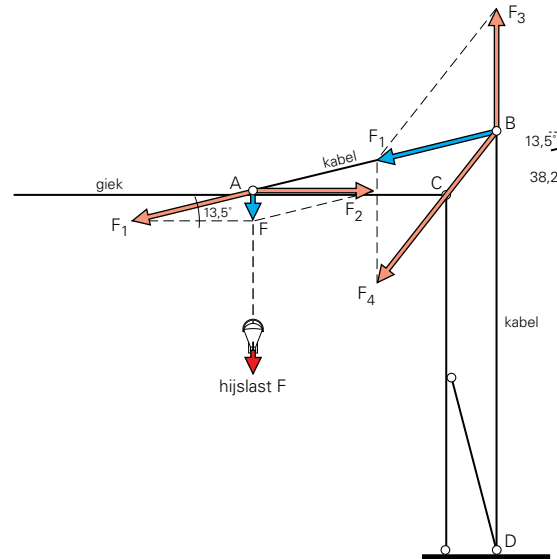
2.2 Kracht F met aangrijpingspunt en werklijn.



2.3 Een kracht mag over zijn werklijn worden verplaatst.



2.12 Bouwkraan met een kubel, gevuld met beton.



Van deze drie krachten zijn verschillende krachtenparallellogrammen te tekenen. De meest voor de hand liggende aanpak is de volgende:

- verplaats hijslast F via zijn werklijn naar knoop A ;
- ontbind hijslast F in twee andere krachten: één kracht F_1 in kabel AB en één kracht F_2 in de giek AC , zodanig dat hijslast F de resultante is van F_1 en F_2 .

Door het herkennen van krachtenparallellogrammen in constructies ontstaat het inzicht hoe krachten zich onderling verhouden. Het is eenvoudig in te zien dat in knoop A de kracht in zowel de kabel als die in de giek aanzienlijk groter is dan de hijslast. Ruim vier keer zo groot is de inschatting; dus ongeveer $4 \cdot 20 \text{ kN} = 80 \text{ kN}$. Dit wordt veroorzaakt door de kleine hoek van $13,5^\circ$ die de giek en de kabel met elkaar maken.

Het is belangrijk na te gaan of een kracht in een staaf een trek- of een drukkracht is. Zowel de vorm als de oppervlakte van de staafdoorsnede hangen namelijk af van de staafkracht. Uitsluitend op trek belaste staven kunnen als kabels worden uitgevoerd. Op druk belaste staven kunnen knikken en hebben daardoor een veel grotere staafdoorsnede nodig.

Kracht F_1 wil knoop A in het verlengde van kabel AB naar links verplaatsen: kabel AB wordt dus op trek belast. Door kracht F_2 wil knoop A naar rechts verplaatsen: de giek AC wordt dus op druk belast. Er is nog een andere manier om na te gaan of een kracht een trekkracht of een drukkracht is, namelijk door het vervormingsgedrag te beoordelen wanneer de staaf wordt 'doorgesneden'. Wanneer de afstand tussen de knopen van de doorsgesneden staaf langer wordt, wordt de staaf op trek belast. Bij druk vindt het tegenstelde plaatst: de afstand tussen de knopen wordt korter. Wanneer dit principe wordt toegepast op de kabel en de giek van afbeelding 2.12 is eveneens de conclusie dat de kabel op trek en de giek op druk wordt belast.

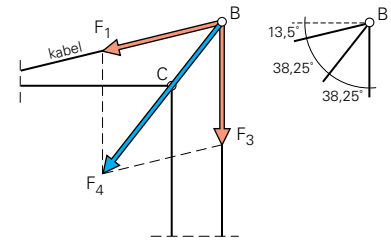
In knoop B komen ook drie krachten samen (zie afb. 2.12). De trekkracht F_1 in de kabel ter plaatse van knoop A is in knoop B uiteraard even groot. Deze kracht wordt ook nu als trekkracht op de knoop getekend, dus van de knoop af.

Kracht F_1 kan in knoop B worden ontbonden in twee andere krachten: één kracht F_3 in kabel BD en één kracht F_4 in staaf BC, zodanig dat F_1 de resultante is van F_3 en F_4 .

Kracht F_3 wil knoop B naar boven verplaatsen: kabel BD wordt dus op trek belast. Kracht F_4 wil knoop B in de richting van knoop C verplaatsen: staaf BC wordt dus op druk belast.

Van knoop B kan ook een ander krachtenparallelogram worden getekend (afb. 2.13). Wanneer de krachten F_1 en F_3 in de kabels beide als trekkracht op de knoop B worden getekend, is kracht F_4 in staaf BC de resultante van deze twee krachten. Door dit krachtenparallelogram ontstaat direct het inzicht dat – bij een gelijke hoek van de twee aansluitende kabels op staaf BC – kracht F_3 in de verticale kabel even groot is als de kracht F_1 in de kabel naar de giek. Aan de hand van de krachtenparallelogrammen van afbeelding 2.12 en 2.13 kunnen de staafkrachten F_1 t/m F_4 grafisch worden bepaald op de wijze zoals is uitgelegd in voorbeeld 2.1. In paragraaf 2.4 worden op basis van deze krachtenparallelogrammen de staafkrachten F_1 t/m F_4 analytisch bepaald, zie voorbeeld 2.5.

Constructies zoals een hijskraan zijn vakwerkconstructies. Hoofdstuk 6 (Vakwerken) behandelt analytische methoden voor het bepalen van de staafkrachten op basis van evenwichtsvergelijkingen.



2.13 Krachtenparallelogram voor knoop B met een even grote trekkracht in de kabels.

2.4 Analytisch ontbinden en samenstellen van krachten

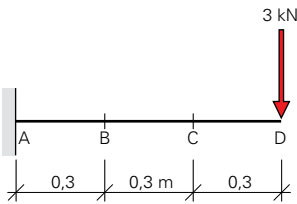
Elk stelsel van willekeurige krachten met willekeurige werklijnen kan analytisch altijd worden samengesteld tot één resultante. Om praktische redenen wordt de analytische methode hier uitsluitend beschreven voor de twee meest voorkomende krachtenstelsels:

- krachten waarvan de werklijnen door één punt gaan;
- krachten met evenwijdige werklijnen.

Voor krachten met evenwijdige werklijnen wordt de momentenstelling van Varignon gebruikt. Deze methode vormt tevens de basis voor het bepalen van het momentevenwicht van constructies.

2.4.1 Krachten die door één punt gaan

Bij een stelsel van krachten die door één punt gaan worden eerst alle schuine krachten ontbonden in verticale en horizontale krachten. Vervolgens worden alle horizontale krachten en alle verticale krachten opgeteld tot één horizontale en één verticale kracht. Deze twee resulterende krachten worden daarna samengesteld tot de resultante van het gehele krachtenstelsel, zie voorbeeld 2.4. In voorbeeld 2.5 wordt de omgekeerde werkwijze gevolgd, waarbij vanuit één bekende kracht twee andere (evenwichtmakende) krachten worden berekend.



2.32 Trap in een woning met ééNZijdig uitkragende treden.

4

De treden van een trap in een woning zijn aan één zijde (A) ingeklemd in een wand. Op het uiteinde (D) wordt de trede belast op een verticale kracht van 3 kN (afb. 2.32).

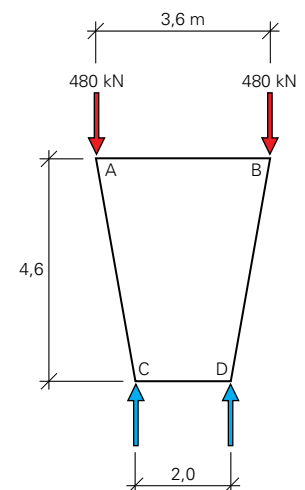
- Bereken de krachten die in snede C werken en teken liggerdeel AC met de krachten die op snede C werken.
- Bereken de krachten die in snede B werken en teken liggerdeel AB met de krachten die op snede B werken.
- Bereken de krachten die in snede A werken en teken knoop A met de krachten die op knoop A werken.

5

Een loopbrug tussen twee schoolgebouwen ligt aan één zijde op een betonnen trapezium-vormige ondersteuningsconstructie (afb. 2.33). Op de bovenrand van de ondersteuningsconstructie grijpen vanuit de opleggingen van de loopbrug twee krachten aan van elk 480 kN. De vragen gaan uitsluitend over het effect van de oplegkrachten van de loopbrug op de ondersteuningsconstructie; het eigen gewicht van ondersteuningsconstructie blijft buiten beschouwing.

- Teken voor knoop A een krachtenparallellogram en bereken de kracht in de bovenbalk (AB) en in de schuine kolom (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is.
- Bereken voor knoop C de kracht vanuit de fundering. Teken vervolgens voor knoop C een krachtenparallellogram en bereken de kracht in de onderbalk (CD) en in de schuine kolom (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is.
- Teken voor knoop C twee verschillende krachtenveelhoeken, waarbij de kracht vanuit de fundering evenwicht maakt met de kracht in de onderbalk (CD) en in de schuine kolom (AC).
- Er is een voorstel om het ontwerp van de ondersteuningsconstructie aan de passen door van het trapezium een driehoek te maken. De lengte van de onderbalk CD wordt dan teruggebracht van 2 m naar 0 m.

Wat betekent dit voorstel voor de grootte van de kracht in de bovenbalk en in de schuine kolom? Licht je antwoord toe door het op schaal schetsen van het krachtenparallellogram voor het trapezium en voor de driehoek.



2.33 Loopbrug van het Mondriaancollege in Den Haag met links de trapeziumvormige ondersteuningsconstructie.

6

Een betonnen brug voor wegverkeer over een singel in een woonwijk wordt naast de locatie gestort en daarna vanaf het bouwterrein op zijn plaats gehesen (afb. 2.34). De brug heeft een gewicht van 3500 kN (350 ton in de hijswereld). Om extra spanningen in de constructie te voorkomen wordt rechtstandig gehesen door een hijsconstructie met meerdere evenaars die op maat zijn gemaakt. De bovenste evenaar heeft een maximale hijscapaciteit van 7200 kN.

- Teken voor knoop A (bovenste evenaar) een krachtenparallellogram en bereken de kracht in de evenaar (AB) en in de schuine hijskabel (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is. De hoek van de schuine hijskabel met de evenaar is 70° .
- De hoek van de schuine hijskabel kan worden aangepast aan de hijsituatie. Het bovenste hijs-oog (knoop C) kan volgens opgave van kraanleverancier in de richting van de schuine hijskabel een kracht opnemen van maximaal 5900 kN. Bereken de hoek tussen de schuine hijskabel en de evenaar die nog net toelaatbaar is.
- De schuine hijskabels van de onderste evenaars maken eveneens een hoek van 70° met de evenaar. Hoe groot zijn de krachten in de onderste evenaars en in de schuine hijskabels? Maak gebruik van de resultaten van vraag a.



2.34 Inhijsen van een (op locatie gestorte) betonnen brug over een singel in een woonwijk in Capelle aan den IJssel.

Uitwendig evenwicht van liggers

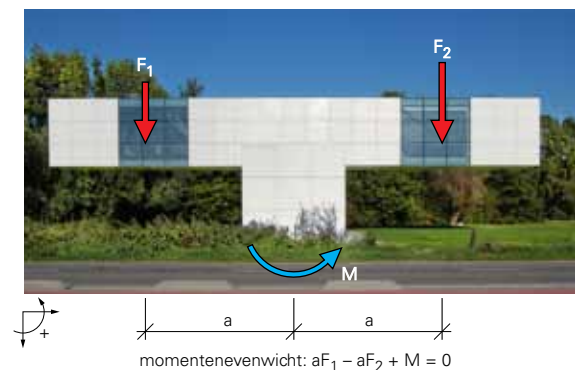
Een constructie is in evenwicht wanneer is voldaan aan de eerste wet van Newton (traagheidswet): de som van alle krachten die op een lichaam werken moeten gelijk zijn aan nul ofwel $\Sigma F = 0$, zie hoofdstuk 1 (Evenwicht en eenheden). Op basis van deze wet volgen voor de bouwpraktijk de drie evenwichtsvoorwaarden:

- de som van alle verticale krachten moet gelijk zijn aan nul: $\Sigma V = 0$
- de som van alle horizontale krachten moet gelijk zijn aan nul: $\Sigma H = 0$
- de som van alle momenten moet gelijk zijn aan nul: $\Sigma M = 0$

In hoofdstuk 2 (Krachtenleer) is beschreven dat de resulterende kracht van een stelsel van krachten wordt bepaald met de momentstelling van Varignon. Deze momentstelling wordt hier gebruikt om de evenwichtmakende kracht(en) te berekenen.

Alle krachten die uitwendig als actiekracht op een constructie werken – bijvoorbeeld als gevolg van de zwaartekracht en door wind – worden de ‘belastingen’ genoemd (afb. 3.1). Deze belastingen moeten door de constructie worden opgenomen en afgevoerd naar de ‘opleggingen’ van de constructie; dat zijn de plaatsen waar de constructie vastzit aan de omgeving. Ook de krachten ter plaatse van de opleggingen zijn uitwendige krachten: deze krachten heten ‘oplegreacties’, analoog aan de derde wet van Newton (actie = reactie).

3.1 Aan twee zijden uitkragende verdieping (van een tentoonstellingspaviljoen) in evenwicht.



Wanneer van een constructie het uitwendig evenwicht wordt berekend, dan wordt hiermee bedoeld dat de oplegreacties worden berekend. Het berekenen van het evenwicht wordt in dit hoofdstuk toegelicht aan de hand van liggers met een beperkt aantal opleggingen, waardoor de oplegreacties kunnen worden berekend met uitsluitend de drie evenwichtsvoorwaarden.

Wanneer alle oplegreacties met uitsluitend de drie evenwichtsvergelijkingen kunnen worden berekend dan wordt de constructie 'uitwendig statisch bepaald' genoemd. In het geval er meer onbekende oplegreacties zijn dan evenwichtsvergelijkingen dan is de constructie 'uitwendig statisch onbepaald', zie hoofdstuk 10 (Statisch onbepaalde constructies). Naast het uitwendig evenwicht kan ook het inwendig evenwicht van een constructie worden berekend. In dat geval worden niet de krachten *op* maar de krachten *in* de constructie berekend, zie hoofdstuk 4 (Inwendig evenwicht).

Dit hoofdstuk begint met een korte uitleg van wat schematiseren inhoudt, zie ook hoofdstuk 11 (Schematiseren). Daarna wordt van drie verschillende liggerconstructies het uitwendig evenwicht (de oplegreacties) bepaald.

3.1 Schematiseren

Schematiseren van een constructie is het modelleren van de (driedimensionale) werkelijkheid naar een rekenmodel. Hiervoor is het van belang te weten:

- hoe de schematische weergave van de constructie eruit ziet;
- hoe de schematische weergave van belastingen eruit ziet.

Het is bijna nooit nodig om alle constructie-elementen waaruit een constructie is opgebouwd in één (groot) driedimensionaal schema weer te geven. Dat betekent dat een constructie-element – of een combinatie van een aantal elementen – in veel gevallen 'vrij kan worden gemaakt' van de omgeving. Het constructie- en belastingschema dat hierdoor ontstaat wordt het 'vrij lichaam schema' (VLS) genoemd. Het uitgangspunt hierbij is altijd: schematiseer een constructie zo eenvoudig mogelijk. Het advies daarbij is om het aantal elementen (liggers en kolommen) te beperken, zonder de werkelijkheid te veel geweld aan te doen. Neem bovendien uitsluitend de belastingen mee die van invloed zijn op de uitkomst. Des te eenvoudiger is de volgende berekeningsstap: de berekening van het uitwendig en inwendig evenwicht. In paragraaf 3.3 (Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug) wordt van de onderslagbalk een VLS gemaakt.

3.3 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug

De constructie van een fiets- en voetgangersbrug over een singel is opgebouwd door een stapeling van een aantal staafvormige elementen (afb. 3.7). Het dek is opgebouwd uit vijf hardhouten langsliggers met daarop in dwarsrichting hardhouten planken. Elke houten langsligger levert een geconcentreerde belasting (puntlast) op een betonnen onderslagbalk (afb. 3.8). De houten langsliggers zijn vrij opgelegd op de onderslagbalk. De betonnen onderslagbalk ($b \times h = 300 \times 350 \text{ mm}^2$) is opgelegd op twee betonnen funderingspalen. Deze palen hebben bóven de bodem van de singel de functie van kolom en ín de bodem de functie van funderingspaal.

De verbinding tussen de betonnen funderingspalen en de betonnen onderslagbalk maakt het mogelijk dat de balk vrij kan doorbuigen op de palen. Bij een verticale belasting buigt de balk iets door en willen de opleggingen (de palen) een heel klein beetje zijdelings verplaatsen. De palen verhinderen deze zeer geringe verplaatsing niet of nauwelijks, omdat ze een aantal meters boven de grond uitsteken en meebuigen. Daarnaast geeft de grond waarin de palen staan relatief gemakkelijk mee.

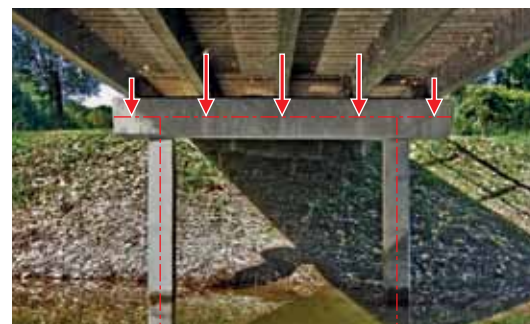
Voor het berekenen van de uitwendige krachten wordt de onderslagbalk eerst 'vrij gemaakt' van zijn omgeving (de hardhouten langsliggers en de funderingspalen). Het 'vrij lichaam schema' (VLS) van de betonnen onderslagbalk is eenvoudig: een lijn opgelegd op een scharnier en een rolscharnier met daarop de vijf puntlasten van het brugdek (afb. 3.9). De scharnieren in het schema geven aan dat de onderslagbalk kan roteren op de funderingspalen (en dus niet of nauwelijks wordt ingeklemd). Het rolscharnier geeft aan dat de opleggingen zijdelings kunnen verplaatsen. Er mag ook maar één rolscharnier worden getekend, omdat anders de constructie instabiel is. Het maakt voor de krachten in en op de ligger niet uit of het rolscharnier links of rechts wordt getekend.

De belastingen op de onderslagbalk ontstaan door:

- eigen gewicht van de betonnen onderslagbalk zelf: dit is een gelijkmatig verdeelde lijnlast q ;
- eigen gewicht van het houten brugdek (langsliggers en planken) in combinatie met de verkeersbelasting op het brugdek: dit zijn de puntlasten F_1 en F_2 .



3.7 Fiets- en voetgangers brug over een singel.



3.8 Krachten vanuit de houten langsliggers op de systeemlijn van de betonnen onderslagbalk.

De rekenwaarden van de belastingen voor de sterkteberekening zijn vastgesteld op, zie hoofdstuk 14 (Belastingcombinaties):

$F_1 = 13,8 \text{ kN}$ oplegreactie houten randliggers
 $F_2 = 24,8 \text{ kN}$ oplegreactie houten tussenliggers
 $q = 2,90 \text{ kN/m}$ eigen gewicht betonnen onderslagbalk

Merk op dat het korte stuk dat de onderslagbalk buiten de langsliggers uitsteekt voor de eenvoud van de schematisering is verwaarloosd. Dit is verantwoord, omdat de belasting door het eigen gewicht relatief klein is en het verwaarlozen van dit stukje balk het berekeningsresultaat nauwelijks beïnvloed. De onderslagbalk moet uitwendig in evenwicht zijn. De oplegreacties zijn de enige, nog onbekende krachten.

Gevraagd: bereken de oplegreacties

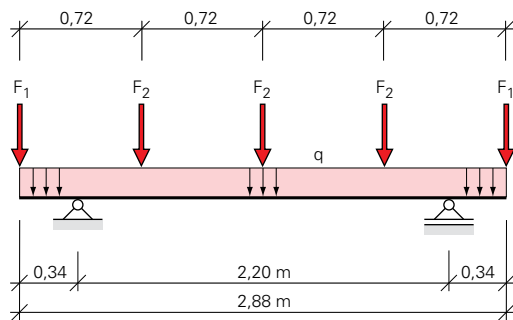
De berekening van de oplegreacties verloopt in drie stappen.

1. Teken de oplegreacties in het schema

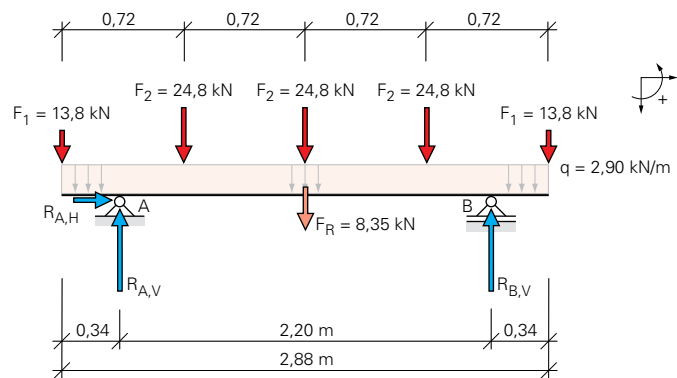
Neem de oplegreacties alvast in de juiste richting aan, wanneer dat inzicht aanwezig is (afb. 3.10). Na de berekening volgt de juistheid van de aanname.

2. Bereken de grootte en de plaats van de resultante van de q -last

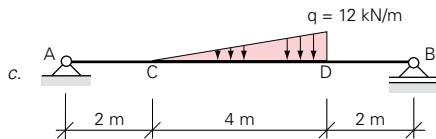
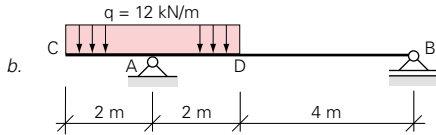
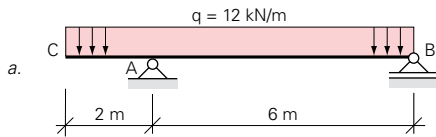
Voor het berekenen van de oplegreacties wordt de q -last vervangen door een puntlast F_R , die in het zwaartepunt van de q -last aangrijpt. De puntlast heeft voor het berekenen van de oplegreacties hetzelfde effect als de q -last. De grootte van F_R bedraagt $F_R = q \text{ kN/m} \cdot 2,88 \text{ m} = 2,90 \cdot 2,88 = 8,35 \text{ kN}$. De plaats van F_R ligt op $2,88 \text{ m} / 2 = 1,44 \text{ m}$ vanaf de rand (links of rechts). De schematisering waarbij de q -last is vervangen door een resulterende kracht F_R is weergegeven in afbeelding 3.10.



3.9 Constructie- en belastingschema van de betonnen onderslagbalk



3.10 Schema van de onderslagbalk met de belastingen en de onbekende oplegreacties $R_{A,H}$, $R_{A,V}$ en $R_{B,V}$.



3.17 Drie liggers op twee steunpunten met verschillende belastingen.

3

Gegeven zijn drie liggers op twee steunpunten, die elk anders worden belast (afb. 3.17a-c). Voor de driehoeksbelasting geldt dat de resultante de helft is van een gelijkmatig verdeelde belasting; het zwaartepunt van de resultante ligt op éénderde afstand vanaf punt D. Bereken voor elke ligger de oplegreacties.

4

Gegeven zijn vier schuingeplaatste liggers op twee steunpunten, die elk anders worden belast (afb. 3.18a-d).

- Bereken voor elke ligger de oplegreacties.
- De uitwendige krachten op de liggers b t/m d vormen koppels. Beschrijf voor elk van deze liggers welke twee koppels evenwicht met elkaar maken.

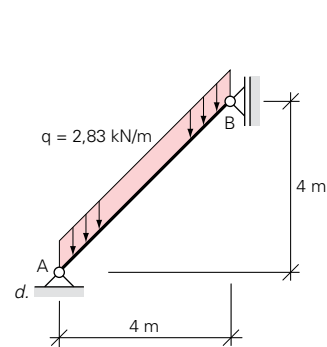
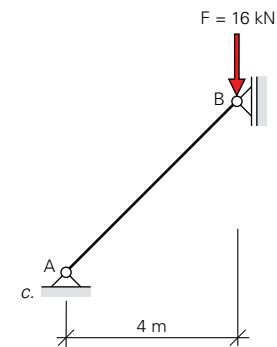
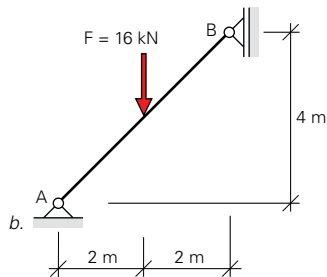
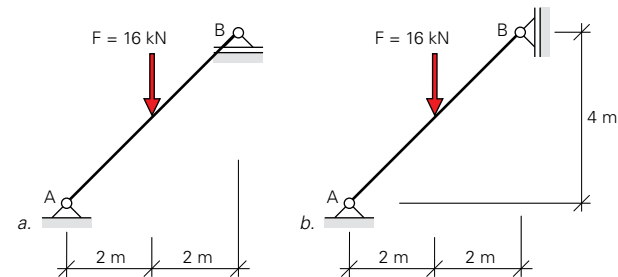
5

Gegeven is een éézijdig ingeklemde ligger en een éézijdig ingeklemde kolom (afb. 3.19). Bereken de oplegreacties.

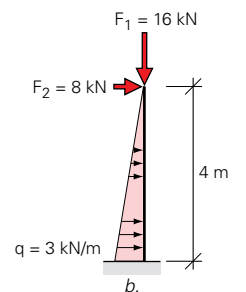
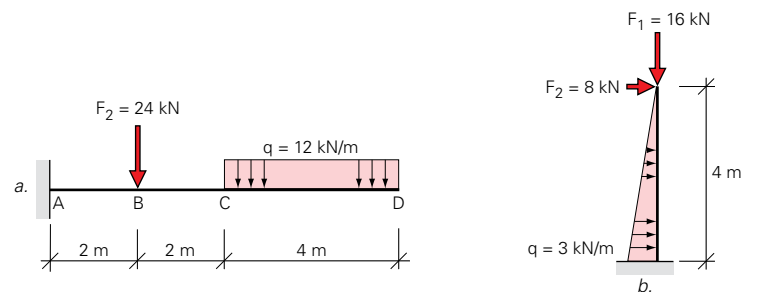
6

Gegeven is het schema van een éézijdig ingeklemd balkon met daaraan momentvast verbonden een leuning (afb. 3.20).

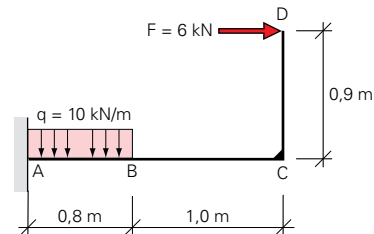
- Bereken de oplegreacties.
- Bereken de oplegreacties nadat de horizontale kracht in D naar C is verplaatst en vergelijk deze oplegreacties met de berekende waarden onder a.



3.18 Vier schuingeplaatste liggers op twee steunpunten met verschillende belastingen.



3.19 Éézijdig ingeklemde ligger en kolom.



3.20 Éézijdig ingeklemd balkon met een ingeklemde leuning.

7

In een woonblok ligt boven elke entree tot twee woningen een stalen latei HEA 140 (afb. 3.21). De dagmaat van de muuropening bedraagt 3,6 m. De latei draagt het bovenliggende metselwerk van de gevel. Het metselwerk is 100 mm dik en heeft een hoogte van 1,1 m. Daarnaast ondersteunt de latei via een schuingeplaatste stalen staaf de zonwering. De staaf maakt een hoek van 15° met de gevel (afb. 3.22). De rekenwaarden van de gelijkmatig verdeelde belasting q (door metselwerk buitenblad en stalen latei) en de puntlast F (stalen staaf) voor de sterkteberekening zijn vastgesteld op:

latei	$q_1 = 2,48 \text{ kN/m}$	halfsteens metselwerk buitenblad
	$q_2 = 0,27 \text{ kN/m}$	eigen gewicht HEA 140
stalen staaf:	$F_1 = 2,46 \text{ kN}$	eigen gewicht zonwering
	$F_2 = 3,52 \text{ kN}$	windbelasting op zonwering (neerwaarts)

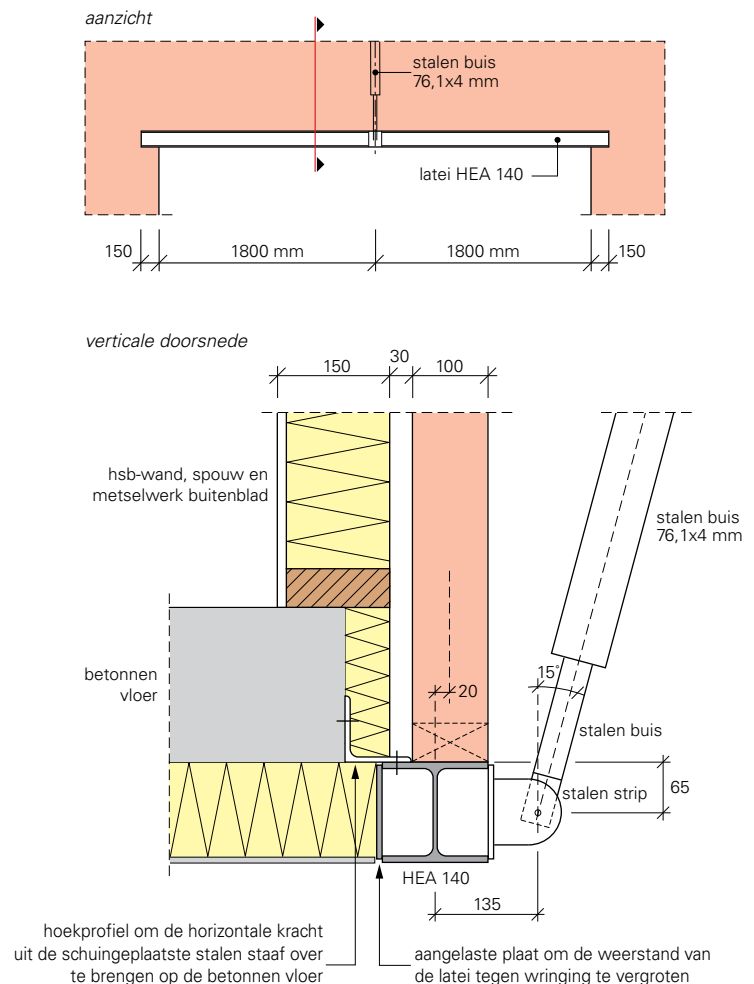
De beide puntlasten F werken in de as van de schuingeplaatste staaf en oefenen daardoor behalve een verticale óók een horizontale kracht uit op de latei. De horizontale kracht wordt via een stalen hoekprofiel achter de latei afgevoerd op de betonnen verdiepingvloer. De horizontale kracht grijpt excentrisch aan op ongeveer 65 mm ten opzichte van het hoekprofiel (vanaf de halve hoogte van de latei). De verticale kracht heeft ten opzichte van het lijf van de latei een excentriciteit van 135 mm. Door beide krachten wordt het profiel HEA 140 op wringing belast. Ook het gemetselde buitenblad belast de latei excentrisch, doordat het zwaartepunt van het metselwerk (= hart steen) aangrijpt op ongeveer 20 mm ten opzichte van het lijf van het profiel HEA 140. Ook hierdoor ontstaat een beetje wringing. Omdat een I-profiel weinig wringing kan opnemen, is aan de binnenzijde van de latei over de gehele lengte een plaat gelast. Zo ontstaat een kokerprofiel dat wél wringing kan opnemen. Met wringing hoeft echter bij deze opgave niet te worden gerekend.

- Maak het 'vrij lichaam schema' (VLS) van de stalen latei HEA 140. Houd daarbij voor de theoretische overspanning het hart van de oplegging aan.
- Bereken de oplegreacties van de latei.

3.22 Maatvoering en principe-detail van de stalen latei HEA 140 met de aansluiting van de schuingeplaatste staaf (ronde buis).



3.21 Latei boven de entree tot twee woningen in een woonblok.



4

Inwendig evenwicht van liggers

Een constructie moet altijd in evenwicht zijn, tenzij het de bedoeling is dat een constructie ook kan bewegen. Denk bijvoorbeeld aan een basculebrug tijdens het openen of sluiten van de brug. Het in evenwicht zijn van een constructie geldt niet alleen voor het gehele bouwwerk, maar ook voor de afzonderlijke elementen waaruit een constructie bestaat, zoals kolommen, liggers en vloer- en dakplaten (afb. 4.1).

Uit het evenwicht van de gehele constructie – of van een afzonderlijk element van de constructie – wordt het *uitwendig* evenwicht bepaald, zie hoofdstuk 3 (Uitwendig evenwicht van liggers). Uit de berekening van het uitwendig evenwicht volgen de oplegreacties. Het is ook mogelijk naar het evenwicht van *een deel* van een constructie-element te kijken. In dat geval wordt het *inwendig* evenwicht berekend. Ook hiervoor gelden de drie evenwichtsvergelijkingen: $\Sigma H = 0$, $\Sigma V = 0$ en $\Sigma M = 0$.

Uit het inwendig evenwicht worden de krachten in doorsneden van een constructie-element berekend. Het materiaal waaruit de constructie bestaat moet weerstand bieden aan deze krachten. Wanneer de inwendige krachten te groot zijn en de materiaalsterkte wordt overschreden bezwijkt de constructie (afb. 4.2). Het toetsen van de sterkte (ook wel aangeduid met 'weerstand') wordt in hoofdstuk 7 (Spanningen) beschreven.

Niet elke doorsnede van een element wordt even zwaar en door dezelfde soort krachten belast. Welke inwendige krachten dat zijn, hangt af van de wijze van belasten. Uitwendige trek- of drukkrachten in de staafas (zoals een drukkracht op een kolom) veroorzaken inwendig *normaalkrachten*.



4.1 Geprefabriceerde betonnen hal in aanbouw.



4.2 Ingestorte parkeergarage in Eindhoven (2017) doordat tijdens de bouw de inwendige krachten de materiaalsterkte overschreden.

Uitwendige belastingen loodrecht op de staafas (zoals puntlasten en lijnlasten op liggers) veroorzaken inwendig *dwarskrachten* en *buigende momenten*.

Om aan te tonen welke snede het zwaarst wordt belast, worden in de praktijk de krachten in alle opeenvolgende sneden bepaald en grafisch weergegeven in een normaalkrachtenlijn, een dwarskrachtenlijn en een momentenlijn.

In dit hoofdstuk wordt het ontstaan van deze snedekrachten geanalyseerd voor een ligger met drie veel voorkomende belastingsituaties, namelijk belast op trek (of druk), belast met een puntlast én belast met een gelijkmatig verdeelde lijnlast. Daarna wordt in drie voorbeelden aangegeven hoe op praktische wijze – met een aantal handige richtlijnen – de normaalkrachtenlijn, de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn wordt berekend en getekend.

4.1 Normaalkrachten door trek (of druk)

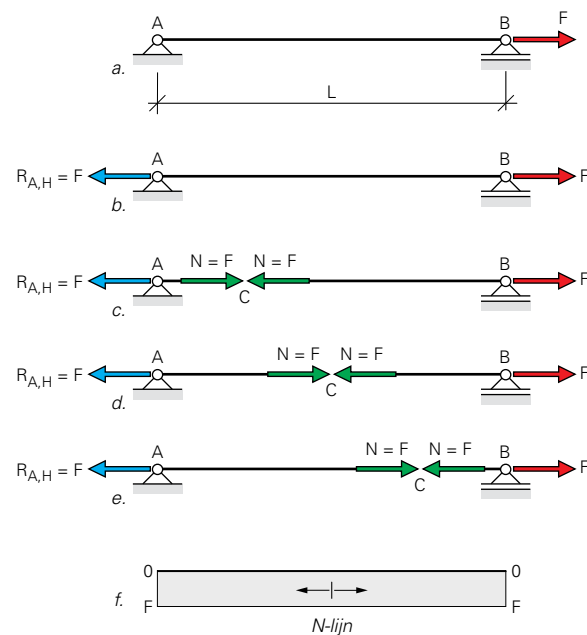
Beschouwd wordt een ligger AB, die in punt A scharnierend is opgelegd en in punt B een roloplegging heeft (afb. 4.3a). In punt B grijpt uitwendig een kracht F aan evenwijdig aan de staafas (in het zwaartepunt van de doorsnede), zodat de ligger centrisch wordt belast. Hier wordt uitsluitend het effect van de kracht F wordt beoordeeld; het eigen gewicht van de staaf blijft buiten beschouwing.

Om te voldoen aan het uitwendig evenwicht is uitsluitend $\Sigma H = 0$ van belang. In oplegging A treedt een even grote horizontale reactiekracht $R_{A,H}$ op die tegengesteld gericht is aan F (afb. 4.3b). Ligger B zal door deze twee uitwendige krachten langer worden en wordt daarom op trek belast. Wanneer de kracht F in de andere richting werkt wordt de ligger op druk belast. In dat geval moet ook het knikken van de ligger worden beoordeeld. Hiervoor wordt verwezen naar paragraaf 7.2.3. De hierna volgende analyse is voor een drukkracht hetzelfde als voor een trekkracht.

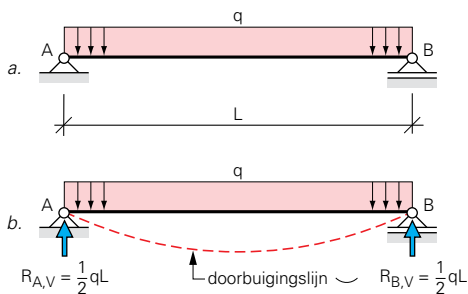
De vraag is nu: welke krachten treden op in de ligger en hoe groot zijn de krachten in de opeenvolgende doorsneden? Daarvoor worden op verschillende plaatsen in de ligger een snede C aangebracht (afb. 4.3c, d en e). Evenals voor het uitwendig evenwicht van de gehele ligger geldt ook dat elk liggerdeel in evenwicht moet zijn ($\Sigma H = 0$).

De kracht in snede C loopt evenwijdig met de staafas. De staafas wordt de 'normaal' genoemd. Voor zowel afbeelding 4.3c, d als e geldt dat in deel AC als deel CB in snede C een normaaltrekkracht N optreedt die even groot, maar tegengesteld gericht is aan de kracht F op het staafende. Dit betekent ook dat in een snede de krachten op elk staafdeel altijd tegengesteld gericht werken. Alleen op deze wijze wordt elk liggerdeel op trek belast.

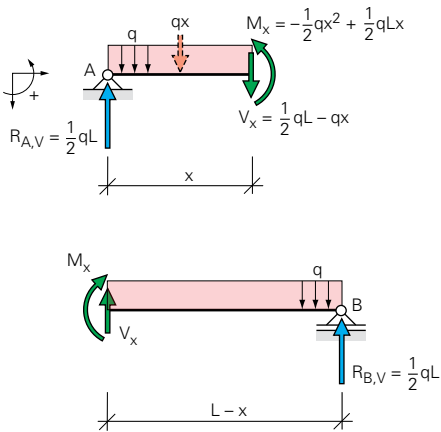
In elke snede van ligger AB is dus over de gehele lengte L een normaaltrekkracht N aanwezig ter grootte van F . Grafisch wordt de grootte van de normaalkracht uitgezet ten opzichte van een 0-lijn met vermelding van de grootte van de normaalkracht (afb. 4.3f). Het teken in de N-lijn geeft aan dat het om een trekkracht gaat.



4.3 Ligger belast op een uitwendige trekkracht: inwendige snedekrachten en N-lijn.



4.11 Krachten op een ligger belast op een gelijkmatig verdeelde lijnlast.



4.12 Snedekrachten op een afstand x van oplegging A.

afstand x	V_x	M_x
0	$+\frac{1}{2}qL$	0
$\frac{1}{4}L$	$+\frac{1}{4}qL$	$+\frac{3}{32}qL^2$
$\frac{1}{2}L$	0	$+\frac{1}{8}qL^2$
$\frac{3}{4}L$	$-\frac{1}{4}qL$	$+\frac{3}{32}qL^2$
L	$-\frac{1}{2}qL$	0

4.13 Waarden van V en M van een ligger, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast.

4.3 Dwarskrachten en buigende momenten door een lijnlast

Afbeelding 4.11a toont een vrij opgelegde ligger op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast (q-last). Voor deze belastingsituatie – die vaak voorkomt – wordt het verloop van de V- en M-lijn onderzocht.

Uit het uitwendig evenwicht volgen de grootte van de oplegreacties $R_{A,V}$ en $R_{B,V}$. Ga na dat geldt: $R_{A,V} = R_{B,V} = 0,5qL \uparrow$ (afb. 4.11b). Er werken geen horizontale krachten op de ligger, dus de oplegreactie $R_{A,H} = 0$. Daarom wordt deze kracht achterwege gelaten.

Het is eenvoudig in te zien dat beide oplegreacties naar boven werken. De ligger wordt dus uitwendig belast door een lijnlast en twee krachten op de uiteinden. Daardoor buigt de ligger ‘naar beneden’ door met een buigteken: $\smile$ (afb. 4.11b).

Analoog aan de belasting door een puntlast (zie paragraaf. 4.2) worden de snedekrachten berekend: A met de drie evenwichtsvergelijkingen; B uit de krachtswerking ten opzichte van een snede.

4.3.1 Snedekrachten uit de evenwichtsvergelijkingen

Ook nu weer worden sneden aangebracht om te achterhalen hoe de snedekrachten zich over de ligger ontwikkelen. Om het gedrag te beschrijven kan met één snede worden volstaan (afb. 4.12). Evenals voor het evenwicht van de gehele ligger geldt ook dat elk liggerdeel in evenwicht moet zijn. Om dit aan te tonen zijn de bruikbare evenwichtsvergelijkingen: $\Sigma V = 0$ en $\Sigma M = 0$.

Om aan het evenwicht te voldoen moet in de snede op een afstand x een dwarskracht V_x en een moment M_x werken. Ook nu moeten de krachten in een snede op elk liggerdeel tegengesteld worden getekend. Het bepalen van de snedekrachten verloopt voor beide liggerdelen even snel. Voor het evenwicht van het linkerdeel geldt:

$$\begin{aligned} \Sigma V = 0 & \quad -\frac{1}{2}q \cdot L + q \cdot x + V_x = 0 \\ & \quad V_x = \frac{1}{2}qL - qx \quad (\text{lineaire vergelijking}) \\ \Sigma M_{\text{om A}} = 0 & \quad -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - V_x \cdot x + M_x = 0 \\ & \quad M_x = \frac{1}{2}qx^2 + \left(\frac{1}{2}qL - qx\right) \cdot x \\ & \quad = -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}qLx \quad (\text{tweedegraads vergelijking}) \end{aligned}$$

Met deze twee vergelijkingen kan voor elke waarde voor x over een afstand L de dwarskracht én het moment worden berekend (tabel 4.13). Uit de berekening van de tussenliggende waarden voor x blijkt het lineaire verloop van de V-lijn en het kwadratisch verloop van de M-lijn (zie afb. 4.15).

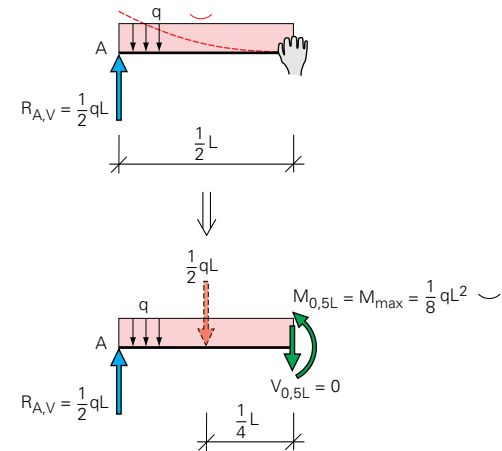
4.3.2 Snedekrachten uit de krachtswerking ten opzichte van een snede

Bij deze methode worden de snedekrachten van afbeelding 4.12 bepaald uit het effect van alle krachten die op het liggerdeel werken ten opzichte van de te beschouwen snede.

Het moment in elke snede van de ligger kan worden berekend door van alle krachten het moment te berekenen ten opzichte van die snede. Hier wordt als voorbeeld het maximale moment (halverwege de ligger met $x = 0,5L$) berekend (afb. 4.14). De vervorming van het liggerdeel bepaalt het buigtekenteken. Omdat het buigtekenteken aangeeft of een moment positief of negatief is, is het bij deze methode niet noodzakelijk de tekenafspraken van de positieve richting van krachten en de positieve draairichting van het moment aan te houden.

$$M_{\max} = \underbrace{\frac{1}{2}qL \cdot \frac{1}{2}L} - \underbrace{\frac{1}{2}qL \cdot \frac{1}{4}L} = \frac{1}{4}qL^2 - \frac{1}{8}qL^2 = \frac{1}{8}qL^2$$

Uit het verticaal evenwicht $\Sigma V = 0$ volgt dat de dwarskracht op een afstand $0,5L$ gelijk is aan nul (afb. 4.14).

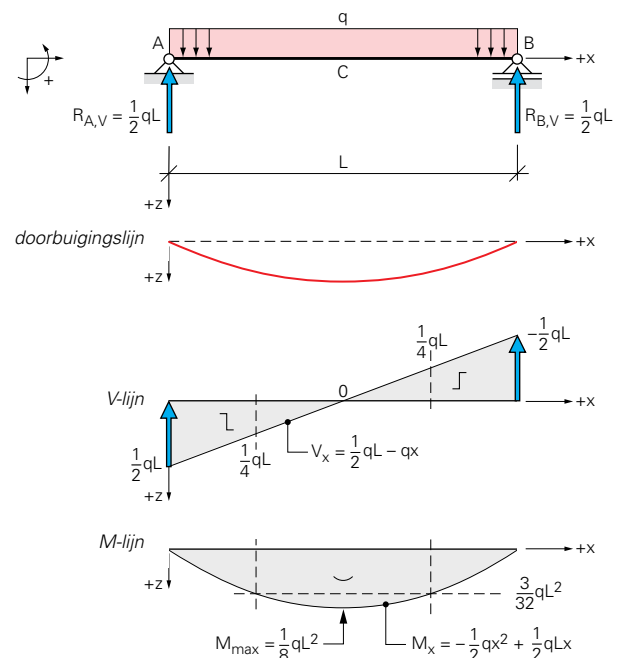


4.14 Schema voor het berekenen van de dwarskracht en het maximale moment halverwege de ligger.

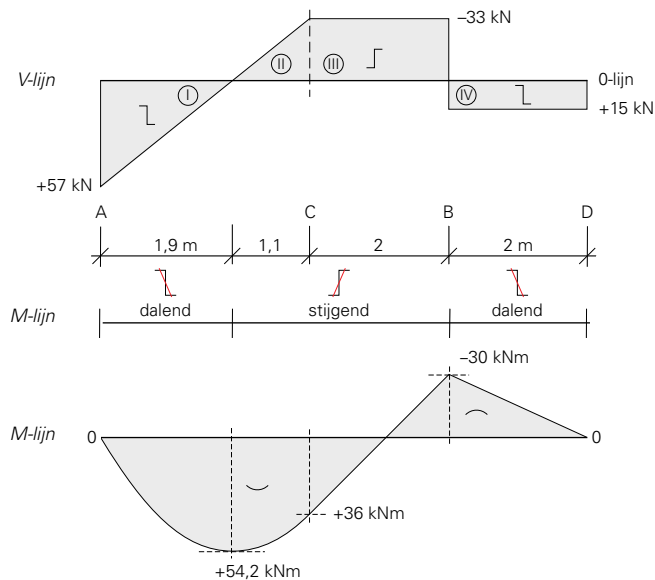
4.3.3 Tekenen van de V- en M-lijn

Op basis van de resultaten in tabel 4.13 is in afbeelding 4.15 de doorbuigingslijn, de V-lijn en de M-lijn getekend in het positieve assenstelsel. De doorbuiging is in elke snede positief en wordt daarom onder de x-as getekend. De dwarskracht is over liggerdeel AC positief en wordt daarom onder de x-as getekend. Over liggerdeel CB is de dwarskracht negatief en wordt dus boven de x-as getekend. Het buigend moment is in elke snede positief en wordt daarom onder de x-as getekend.

In het algemeen geldt dat waar de dwarskracht nul is (dus waar de V-lijn de 0-lijn snijdt), een maximaal moment aanwezig is.



4.15 Verloop van de doorbuiging, dwarskrachten en momenten in het positieve assenstelsel.



4.30 Berekening van de momenten op basis van het oppervlak van de V-lijn.

Als alternatief kunnen de momenten uit de evenwichtsvergelijking $\Sigma M = 0$ worden bepaald; deze methode wordt aan de lezer overgelaten. De momenten volgen ook uit het wiskundig verband tussen belasting, dwarskracht en moment (zie paragraaf 4.4). De M-lijn kan namelijk worden berekend vanuit het oppervlak van de V-lijn (afb. 4.30). Het moment neemt toe, of af, met het oppervlak van de V-lijn. Aan het begin van de ligger (in A) en aan het eind (in D) is het moment nul (heeft dus geen beginwaarde). Beginnend vanaf links (in A) wordt de volgende berekening gemaakt:

oppervlak I: $M_{A-B, \max} = +0,5 \cdot 57 \cdot 1,9 = +54,2 \text{ kNm}$ (dalende M-lijn)

oppervlak I + II: $M_C = +54,2 - 0,5 \cdot 33 \cdot 1,1 = +36 \text{ kNm}$ (stijgende lijn)

oppervlak I + II + III: $M_B = +36 - 33 \cdot 2 = -30 \text{ kNm}$ (dalende M-lijn)

oppervlak I + II + III + VI: $M_D = -30 + 15 \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$ (zoals verwacht)

Wanneer vanaf rechts worden begonnen zijn de resultaten (uiteraard) hetzelfde. Ga dit na.

4.5.2 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug

Gegeven is een onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug (afb. 4.31), waarvan in paragraaf 3.3 met de berekening van het uitwendig evenwicht de oplegreacties zijn bepaald. Van de onderslagbalk worden nu de inwendige krachten berekend in de relevante sneden én de N-, V- en M-lijn getekend evenals de doorbuigingslijn. De uitwerking gebeurt op dezelfde wijze als voor de ligger met overstek van paragraaf 4.5.1.

De gehele berekening met het verloop van de N-, V-, M-lijn met maximale waarden en de doorbuigingslijn is opgenomen in afbeelding 4.32. De berekening verloopt in vijf stappen.



4.31 Fiets- en voetgangersbrug over een singel.

1. Analyseer het probleem

Zowel de constructie als de belastingen op de constructie zijn symmetrisch. Dat betekent dat de oplegreacties in A en B even groot zijn en het verloop van de N-, V- en M-lijn 'symmetrisch' is.

De oplegreacties $R_{A,V}$ en $R_{B,V}$ werken naar boven. Deze belasting-situatie geeft een doorbuigingslijn zoals in afbeelding 4.32 is geschetst. Hierdoor ontstaat het inzicht in de buigtekens en de globale ligging van de buigpunten van de M-lijn (waar $M = 0$). Evenals bij de ligger met overstek (zie par. 4.3.1) is het van te voren moeilijk in te schatten of de uiteinden van de overstekken naar beneden of naar boven verplaatsen.

Op twee plaatsen treedt een maximaal moment op. Boven de steunpunten is een negatief moment aanwezig en in het veld (halverwege tussen A en B) een positief moment. Dit positieve moment zal bij de gegeven verhoudingen groter zijn dan het steunpunts-moment in A en B.

Bij het tekenen van de V- en M-lijn wordt handig gebruik gemaakt van de relaties tussen belasting, V-lijn en M-lijn (zie afb. 4.17, 4.18 en 4.21). Dit betekent dat de puntlasten horizontale lijnen in de V-lijn geven (dwarskracht is constant) en een schuin lopende M-lijn (eerstegraads vergelijking). De gelijkmatig verdeelde q-last geeft een schuin lopende V-lijn (eerstegraads vergelijking) en een gebogen M-lijn (tweedegraads vergelijking).

2. Bereken de oplegreacties

De oplegreacties zijn berekend in paragraaf 3.3: $R_{A,H} = 0 \text{ kN}$, $R_{A,V} = R_{B,V} = 55,2 \text{ kN}$. De richtingen van de oplegreacties stemmen overeen met de analyse (afb. 4.32).

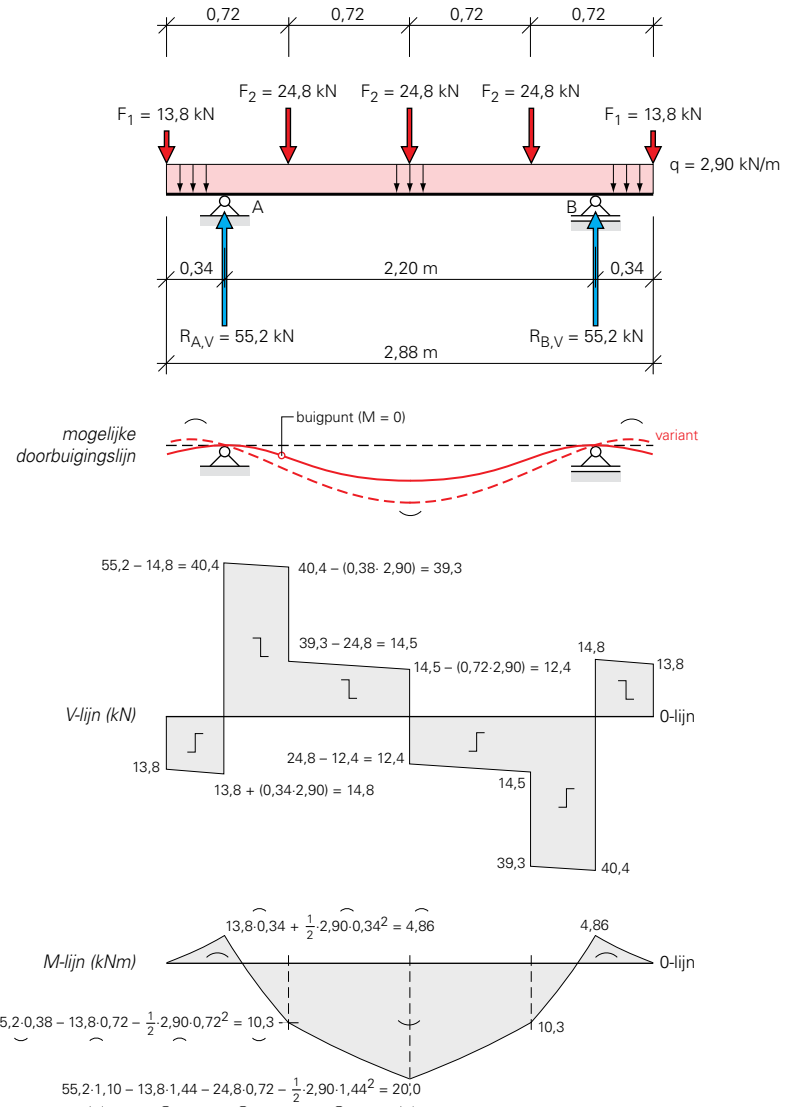
3. Bereken en teken de N-lijn

In de ligger zijn inwendig geen normaalkrachten aanwezig, omdat er uitwendig geen horizontale belastingen aanwezig zijn. Het tekenen van de N-lijn blijft daarom achterwege.

4. Bereken en teken de V-lijn

Met het tekenen van de V-lijn is aan de linkerkzijde van de ligger begonnen, zoals in de praktijk meestal gebeurt (afb. 4.32). Tussen de puntlasten is de hoek van de V-lijn hetzelfde, omdat de q-last over de gehele balk hetzelfde is (30 kN/m) en de dwarskracht elke meter afneemt met een waarde van 30 kN.

Ga na of het verloop van de V-lijn overeenstemt met de kenmerken van afbeelding 4.17 en 4.21.



4.32 Onderslagbalk met alle uitwendige krachten, de doorbuigingslijn en de berekening en tekening van de V- en M-lijn.

Scharnierliggers en driescharnierspanten

In hoofdstuk 3 (Uitwendig evenwicht van liggers) en hoofdstuk 4 (Inwendig evenwicht van liggers) zijn statisch bepaalde liggers berekend die uit één enkele staaf bestaan, eventueel met een overstek aan één of beide kanten. Deze liggers hebben maximaal drie onbekende oplegreacties die met de drie evenwichtsvergelijkingen worden berekend.

Een *scharnierligger* is opgebouwd uit meerdere liggerdelen, die scharnierend met elkaar zijn verbonden. Een scharnierligger bevat altijd liggerdelen met een overstek. Ook scharnierliggers zijn statisch bepaald: dat betekent dat ze kunnen worden berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen. Scharnierliggers worden bijvoorbeeld toegepast in dakconstructies en als liggers van viaducten (afb. 5.1) en worden bijna altijd geprefabriceerd (in staal, beton en hout). Een scharnierligger heet ook wel een Gerber-ligger, vernoemd naar de Duitse ingenieur Henrich Gerber (1832-1912) die dit constructietype als eerste toepaste.

Een *driescharnierspant* bestaat uit twee, meestal geknikte of gebogen delen (afb. 5.2). Op de bouwplaats worden deze geprefabriceerde delen (doorgaans van staal of hout) gemonteerd met drie scharnierende verbindingen: twee aan de voeten en één in de top. Driescharnierspanten van hout hebben vaak echte scharnierende verbindingen in staal (afb. 5.3). Uitvoeringen in beton komen om economische redenen weinig voor. Driescharnierspanten zijn – evenals scharnierliggers – statisch bepaald en worden dus berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen. Ze worden bijvoorbeeld toegepast in hallen, loodsen en voor kleine fiets- en voetgangersbruggen.



5.1 Viaduct in Maasmechelen over de Zuid-Willemsvaart, uitgevoerd als betonnen scharnierligger. De tandoplegging van de ingehangen ligger is het scharnier.



5.2 Houten driescharnierspant in boogvorm van een fietsersbrug.



5.3 Kolomvoet van een houten spant, uitgevoerd als scharnier.

5.1 Scharnierliggers

Deze paragraaf beschrijft de belangrijkste ontwerputgangspunten en een aantal kenmerken van scharnierliggers. Daarna volgen twee voorbeeldberekeningen: van een tweevelds-scharnierligger én van een drievelds-scharnierligger.

5.1.1 Ontwerpen van scharnierliggers

Een scharnierligger heeft altijd minimaal één liggerdeel met vaste ondersteuning en één of meerdere liggerdelen die ter plaatse van het scharnier zwevend worden ondersteund (afb. 5.4). Bij het ontwerp van een scharnierligger moeten twee vragen altijd worden beantwoord:

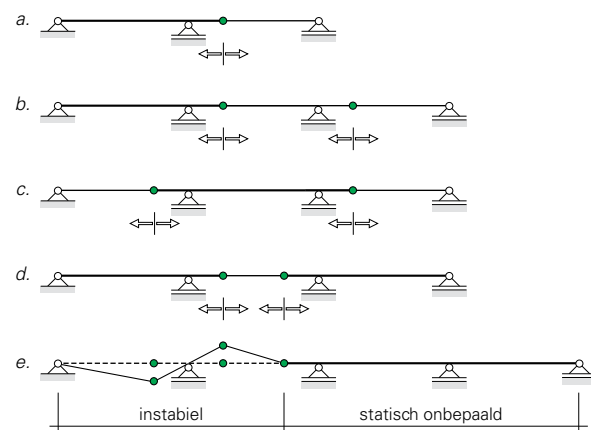
- hoeveel inwendige scharnieren heeft de scharnierligger nodig om statisch bepaald te zijn;
- waar kunnen deze scharnieren het best worden aangebracht.

Een tweevelds-ligger heeft maar één inwendig scharnier nodig en de plaatsingsmogelijkheden van dat scharnier zijn beperkt, waarbij uitsluitend de afstand van het scharnier ten opzichte van het tussensteunpunt van belang is (afb. 5.4a). Vaak is het uitgangspunt: kies de plaats van het scharnier zó dat het buigend moment in het veld even groot is als het buigend moment ter plaatse van het tussensteunpunt. Bij de tweevelds-ligger van afbeelding 5.4a met gelijke afstanden L tussen de steunpunten en belast door een gelijkmatig verdeelde q -last is dat het geval wanneer het scharnier op een afstand van $0,171L$ ligt vanaf het tussensteunpunt. Een drievelds-ligger heeft altijd twee inwendige scharnieren nodig, waardoor er meer mogelijkheden zijn om de scharnieren aan te brengen (afb. 5.4b-d). Het vereiste aantal inwendige scharnieren is het aantal velden minus één.

De scharnieren moeten doelmatig worden aangebracht: dat betekent dat niet alleen het juiste aantal extra scharnieren van belang is, maar ook dat ze op de juiste plaats worden aangebracht. Wanneer niet aan deze beide voorwaarden wordt voldaan is de ligger instabiel óf is het geen scharnierligger. De ligger bevat dan statisch onbepaalde liggerdelen die niet meer met uitsluitend de drie evenwichtsvergelijkingen kunnen worden berekend (afb. 5.4e). In afbeelding 5.4a-d zijn alle scharnieren doelmatig aangebracht: één scharnier extra maakt deze liggers instabiel.

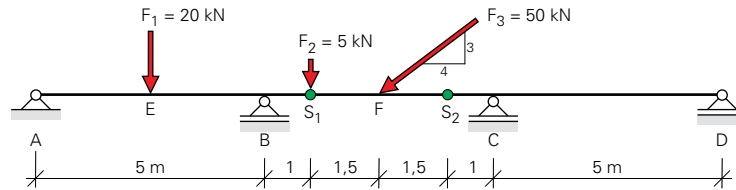
Scharnieren moeten constructief zo worden vormgegeven dat gelijktijdig een verticale én een horizontale kracht kan worden overgebracht naar het volgende liggerdeel. Een scharnier hoeft geen moment over te brengen: daarom zijn scharnierverbindingen eenvoudig van uitvoering en relatief goedkoop.

Een scharnierligger heeft een aantal kenmerken ten opzichte van een doorgaande (statisch onbepaalde) ligger zonder inwendige scharnieren.

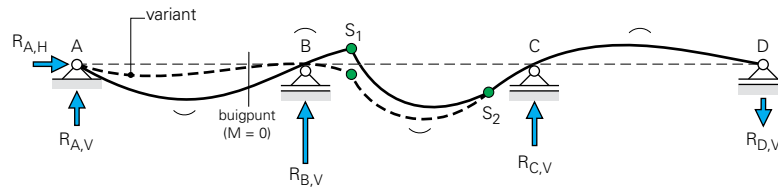


5.4 Twee- en drieveldscharnierliggers met het juiste aantal en de juiste plaatsing van de scharnieren (a t/m d). De scharnierligger met vier velden (e) heeft wel het juiste aantal scharnieren, maar deze zijn niet juist geplaatst.

5.10 Scharnierligger met drie velden, belast door drie krachten.



5.11 Analyse van de drievelds-scharnierligger.



5.1.3 Drievelds-scharnierligger

Gegeven is een scharnierligger AD, die is opgebouwd uit drie liggerdelen AS_1 , S_1S_2 en S_2D (afb. 5.10). De ligger wordt belast door de drie puntlasten F_1 , F_2 en F_3 .

Van deze scharnierligger worden de oplegreacties en de scharnierkrachten berekend, de N-, V- en M-lijn berekend en getekend én de doorbuigingslijn getekend. De berekening van de scharnierligger verloopt in zeven stappen.

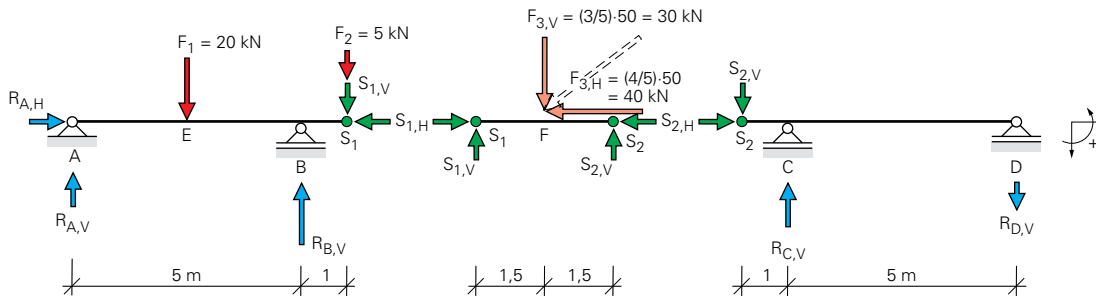
1. Analyseer het probleem

Schets de te verwachten doorbuigingslijn (afb. 5.11). Hierdoor ontstaat, voorafgaand aan de berekening, het inzicht in de richting van de oplegreacties, de buigtekens van de momentenlijn én de globale ligging van de buigpunten (waar $M = 0$).

Puntlast F_3 oefent een neerwaartse verticale kracht en een horizontale kracht naar links uit op liggerdeel S_1S_2 . De rolscharnieren van de opleggingen B, C en D kunnen geen horizontale reactie leveren, zodat de horizontale component van puntlast F_3 geheel door oplegging A wordt opgenomen. Vanaf het aangrijpingspunt van puntlast F_3 tot aan oplegging A is in de ligger een normaaldrukkracht aanwezig.

De verticale component van puntlast F_3 grijpt halverwege de overspanning van liggerdeel S_1S_2 aan en geeft daarom even grote verticale krachten af in S_1 en S_2 . Liggerdeel S_2D buigt daardoor op tussen C en D en de oplegreactie in D werkt naar beneden. De oplegreactie in C werkt naar boven. In S_1 zijn twee verticale krachten aanwezig: F_2 en de helft van de verticale component van F_3 . Door deze twee krachten werkt de oplegreactie in A naar beneden. Echter F_1 geeft in A een opwaartse reactie. De verwachting is dat de opwaartse reactie van F_1 groter is dan de neerwaartse reactie van F_2 en F_3 . In dat geval buigt de ligger vanaf A naar beneden door. Met weinig ervaring is dit lastig in te schatten. Oplegging B levert in elk geval een opwaartse reactie.

Of scharnier S_1 naar boven of naar beneden verplaatst is lastig te voorspellen. Uitsluitend een berekening van de doorbuiging van de scharnierligger kan uitsluitend geven. De richtingen van de buigtekens en de globale ligging van de buigpunten veranderen daar niet door.



5.12 Scharnierligger in S_1 en S_2 gesplitst in drie delen met in totaal de negen onbekende krachten.

2. Beoordeel het evenwicht van de afzonderlijke liggedelen

Splits scharnierligger AD op in de drie delen AS_1 , S_1S_2 en S_2D (afb. 5.12).

Neem een richting aan voor de oplegreacties en scharnierkrachten (zie stap 1). Het advies is de oplegreacties en scharnierkrachten in de juiste richting te tekenen (indien het inzicht aanwezig is).

Na de berekening volgt de juistheid van de aannamen. Let op: de richtingen van de scharnierkrachten S_1 respectievelijk S_2 moeten *altijd* tegengesteld aan elkaar worden aangehouden.

Ontbind de schuine kracht F_3 in een horizontale en een verticale component volgens de verhoudingen 3-4-5 (afb. 5.12).

Kracht F_2 grijpt aan in scharnier S_1 . Voor het resultaat maakt het niet uit of F_2 op liggedeelte AS_1 wordt geplaatst of op liggedeelte S_1S_2 . Het advies is de kracht te plaatsen op het liggedeelte met de twee vaste opleggingen, omdat dit liggedeelte de reacties levert van deze kracht. In dit voorbeeld is dat liggedeelte AS_1 .

3. Bereken voor elk liggedeelte de oplegreacties en de scharnierkrachten

Er zijn in totaal negen onbekende krachten. Begin altijd met het liggedeelte met het minst aantal onbekenden: dat is altijd het liggedeelte dat zwevend is ondersteund. In dit geval is dat liggedeelte S_1S_2 (afb. 5.12). Liggedeelte S_1S_2 heeft vier onbekende krachten: $S_{1,H}$, $S_{2,H}$, $S_{1,V}$ en $S_{2,V}$. In stap 1 is beredeneerd dat $S_{2,H} = 0$, zodat met de drie evenwichtsvergelijkingen de drie onbekende scharnierkrachten $S_{1,V}$, $S_{1,H}$ en $S_{2,V}$ zijn te berekenen.

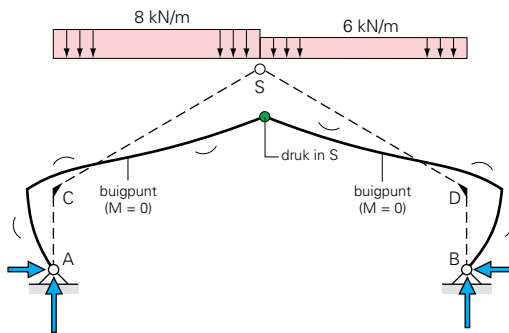
Evenwicht liggedeelte S_1S_2 :

$$S_{2,H} = 0 \quad (\text{de rolopleggingen in C en D leveren geen horizontale reactie})$$

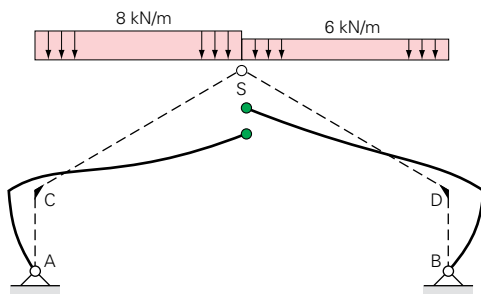
$$\Sigma H = 0 \quad +S_{1,H} - 40 = 0$$

$$S_{1,H} = +40 \text{ kN} \rightarrow (\text{aanname richting correct})$$

$$\Sigma V = 0 \quad S_{1,V} = S_{2,V} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ kN} \uparrow \quad (\text{op basis van symmetrie})$$

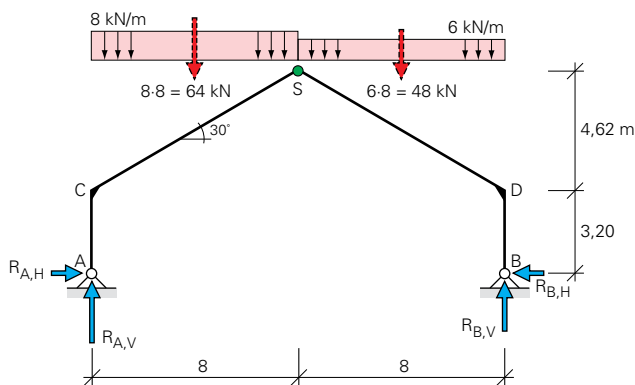


a. richting oplegreacties en buigingen in de staven



b. het zwaarst belaste spantdeel (links) wil het meest naar beneden verplaatsen

5.26 Analyse van het kniespant.



5.27 Kniespant met de vier onbekende oplegreacties.

1. Analyseer het probleem

Schets de te verwachten doorbuigingslijn (afb. 5.26a). Hierdoor ontstaat, voorafgaand aan de berekening, het inzicht in de richting van de oplegreacties, de buigtekens van de momentenlijn en de globale ligging van de buigpunten (waar $M = 0$).

Door de neerwaartse belasting werkt in beide opleggingen een naar boven gerichte verticale reactie. Door de neerwaartse belasting willen de spantbenen ter plaatse van de opleggingen naar buiten verplaatsen. De horizontale oplegreacties voorkomen dat en daarom zijn beide naar binnen gericht. De horizontale oplegreacties zijn bovendien even groot, omdat er geen andere horizontale krachten op de constructie werken. Door de verhinderde verplaatsing van de opleggingen A en B buigen de staven zoals in afbeelding 5.26a is aangegeven.

Omdat de horizontale oplegreacties in A en B naar binnen zijn gericht, worden de spantbenen in de top tegen elkaar gedrukt: de horizontale scharnierkracht is dus een drukkracht. Het spantdeel ACS wordt zwaarder belast dan spantdeel BDS, waardoor de top van het linkerspantdeel ter plaatse van S meer naar beneden wil verplaatsen dan van het rechterdeel (afb. 5.26b). Daardoor ondersteunt het rechterspantdeel het linkerspantdeel. Met andere woorden: het linkerdeel leunt op het rechterdeel. De verticale scharnierkracht werkt op het linkerspantdeel daarom naar boven. Op het rechterspantdeel werkt de verticale scharnierkracht dan naar beneden.

Het spant wordt asymmetrisch belast. Daarom verplaatst top S, behalve neerwaarts, ook nog een beetje opzij. Omdat de linkerhelft van het spant zwaarder wordt belast dan de rechterhelft is de verwachting dat top S naar rechts verplaatst.

2. Bereken de oplegreacties $R_{A,V}$ en $R_{B,V}$ vanuit het evenwicht van de gehele constructie

Het advies is het kniespant niet meteen te splitsen in twee delen. Elk spantdeel heeft namelijk vier onbekende krachten: twee oplegreacties en twee scharnierkrachten. Elk spantdeel heeft echter maar drie evenwichtsvergelijkingen, zodat de berekening van een spantdeel dan niet direct tot een oplossing van de onbekende krachten leidt.

Neem een richting aan voor de oplegreacties (afb. 5.27). Het advies is de oplegreacties en scharnierkrachten in de juiste richting te tekenen. In stap 1 is beredeneerd dat de verticale reactiekrachten naar boven werken en de horizontale reactiekrachten naar binnen zijn gericht. Na de berekening volgt de juistheid van de aannamen. Maak van elke q-last een resulterende kracht: dat verkleint de kans op fouten.

De spantvoeten liggen op dezelfde hoogte liggen. Daardoor kan uit het evenwicht van het gehele spant de verticale oplegreacties $R_{A,V}$ en $R_{B,V}$ worden berekend.

$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \quad -64 \cdot 4 - 48 \cdot 12 + R_{B,V} \cdot 16 = 0$$

$$16R_{B,V} = +832$$

$$R_{B,V} = +52 \text{ kN} \uparrow \text{ (aanname richting correct)}$$

$$\Sigma V = 0 \quad -R_{A,V} + 64 + 48 - 52 = 0$$

$$R_{A,V} = +60 \text{ kN} \uparrow \text{ (aanname richting correct)}$$

3. Bereken de oplegreacties $R_{A,H}$ en $R_{B,H}$ en de scharnierkrachten S_H en S_V vanuit het evenwicht van de afzonderlijke spantdelen

Splits het kniespant ter plaatse van scharnier S op in twee delen (afb. 5.28) en neem een richting aan voor de scharnierkrachten. Het advies is de scharnierkrachten in de juiste richting te tekenen. De richting van de scharnierkrachten is in stap 1 beredeneerd. Na berekening volgt de juistheid van de aannamen. Let op: de richtingen van de scharnierkrachten in S moeten *altijd* tegengesteld aan elkaar worden aangehouden.

Voor elk spantdeel moeten nog drie onbekende krachten worden berekend: een horizontale oplegreactie en twee scharnierkrachten. Met de drie evenwichtsvergelijkingen zijn deze onbekende krachten te berekenen. Het maakt niet uit met welk spantdeel wordt begonnen.

Evenwicht spantdeel ACS:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{om S} = 0 & \quad -60 \cdot 8 + R_{A,H} \cdot 7,82 + 64 \cdot 4 = 0 \\ & \quad 7,82 R_{A,H} = +224 \\ & \quad R_{A,H} = +28,6 \text{ kN} \leftarrow (\text{aanname richting correct}) \\ \Sigma H = 0 & \quad +28,6 - S_H = 0 \\ & \quad S_H = +28,6 \text{ kN} \rightarrow (\text{aanname richting correct}) \\ \Sigma V = 0 & \quad -60 + 64 - S_V = 0 \\ & \quad S_V = +4 \text{ kN} \uparrow (\text{aanname richting correct})\end{aligned}$$

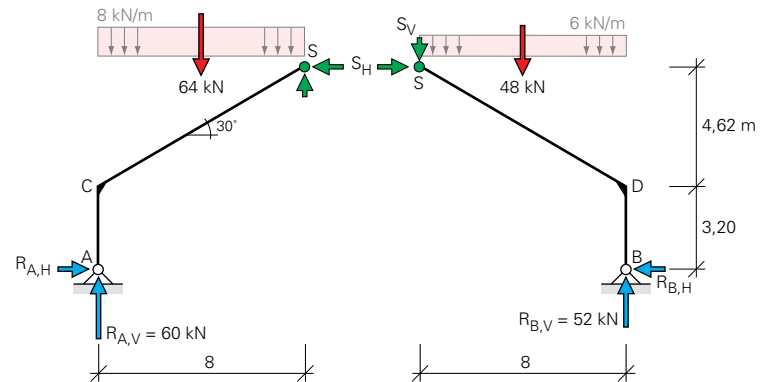
Ga na dat deze drie evenwichtsvergelijkingen ook in een andere volgorde kunnen worden toegepast.

Evenwicht spantdeel BDS:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{om S} = 0 & \quad +52 \cdot 8 - R_{B,H} \cdot 7,82 - 48 \cdot 4 = 0 \\ & \quad 7,82 R_{B,H} = +224 \\ & \quad R_{B,H} = +28,6 \text{ kN} \leftarrow (\text{aanname richting correct}) \\ \Sigma V = 0 & \quad -52 + 48 - S_V = 0 \\ & \quad S_V = +4 \text{ kN} \downarrow (\text{aanname richting correct})\end{aligned}$$

Conclusie

- Op de gehele constructie werken maar twee horizontale krachten: $R_{A,H}$ en $R_{B,H}$. Deze krachten moeten dan even groot en tegengesteld gericht zijn. De berekening bevestigt dit.
- Uit de berekening volgt dat het linkerspantdeel inderdaad op het rechterspantdeel leunt.
- In het geval van een symmetrische belasting zakken de beide spantdelen in de top verticaal evenveel. Er vindt geen verticale krachtsoverdracht plaats tussen beide spantdelen en geldt voor de scharnierkracht $S_V = 0$.



5.28 Kniespant gesplitst in twee delen met in totaal zes onbekende krachten.

Vakwerken



6.1 Vakwerkhuis in Alfter (Duitsland).

Een vakwerk is een constructie die geheel is opgebouwd uit staven die samen driehoeken vormen. Een driehoek is vormvast, zodat meerdere (aan elkaar geschakelde) driehoeken samen óók een vormvaste constructie zijn. Het bouwen met driehoeken is al heel oud. Zo ontstond in de Middeleeuwen de vakwerkbouw voor met name houten boerderijen en huizen (afb. 6.1). Tegenwoordig worden vakwerken in bouwconstructies meestal gemaakt van staal of van hout. De vormvrijheid is enorm groot en daarbij gelden eigenlijk geen beperkingen voor de afmetingen en de verschijningsvorm: van relatief klein en in serie vervaardigd (afb. 6.2) tot zeer groot voor een uniek ontwerp (afb. 6.3). Meestal worden vlakke vakwerken toegepast in de vorm van liggers (afb. 6.4), maar ook ruimtelijke vakwerkconstructies komen voor (afb. 6.5).



6.2 Lichte (verzinkte) stalen vakwerkliggers in een kas.



6.3 Chaotianman-brug over de Yangtze bij Chongqing (China): stalen vakwerkboogbrug met een overspanning van 552 m.



6.4 Houten vakwerkliggers voor een fietsers- en voetgangersbrug.



6.5 Ruimtelijk gekromd stalen vakwerk voor een fietsenstalling in Alphen aan de Rijn.

Dit hoofdstuk beschrijft zowel het ontwerpen van vakwerken, als het berekenen van de staafkrachten in vlakke vakwerken. Een statisch bepaald ontworpen vakwerk kan vrij eenvoudig 'met de hand' worden berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$ en $\Sigma M = 0$. Het berekenen wordt op drie manieren toegelicht: vanuit de V- en M-lijn, met de knooppuntmethode én met de snedemethode. Een bijzonder type vakwerk is de onderspannen ligger. Van deze visueel aantrekkelijke ligger wordt de krachtswerking verklaard.

6.1 Efficiënt materiaalgebruik

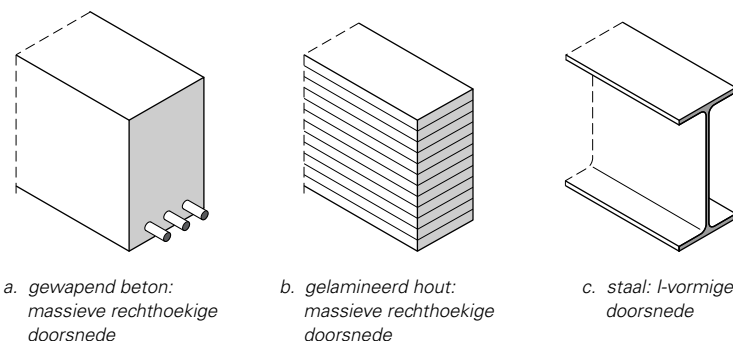
Voor relatief kleine overspanningen is het economisch om liggers met een massieve doorsneden toe te passen. Er zijn daarbij verschillende doorsnedevormen mogelijk, zoals rechthoekige liggers van gezaagd en gelamineerd hout of van gewapend beton (afb. 6.6a en b).

Een op buiging belaste ligger heeft vooral materiaal nodig aan de 'buitenzijde', namelijk daar waar in de doorsnede de spanningen het grootst zijn, zie hoofdstuk 7 (Spanningen). Dat verklaart de I-vormige doorsnede van stalen IPE- en HE-profielen (afb. 6.6c). Om dezelfde reden worden de stalen wapeningstaven in betonnen balken zover mogelijk aan de buitenzijde aangebracht (afb. 6.6a).

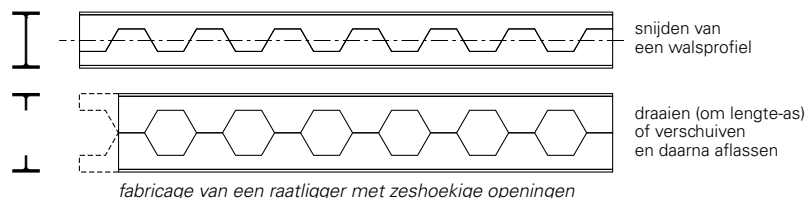
De I-vorm is de eerste stap naar een efficiënt materiaalgebruik. Ook in beton en hout is de I-vorm economisch haalbaar. Geprefabriceerde I-vormige voorgespannen liggers van beton worden veelvuldig toegepast voor grote overspanningen in bruggen en hallen. De I-vorm in hout – opgebouwd uit goedkoop plaatmateriaal en/of gezaagd hout – kan bijvoorbeeld worden toegepast als vloerligger, zelfs al bij relatief kleine overspanningen.

Het materiaalgebruik kan nog efficiënter met nóg meer materiaal aan de 'buitenzijde', zoals bij raatliggers. Deze liggers worden gesneden uit een I-vormige walsprofiel – zoals een IPE of HE – en na verschuiven (of door draaien om de lengte-as) van de twee delen ter plaatse van het lijf aan elkaar gelast. De verhoogde vorm maakt deze liggers sterker én buigstijver dan het oorspronkelijke I-profiel (afb. 6.7).

De stap naar een meer 'open' structuur van het vakwerk is daarna niet zo groot meer. Een vakwerk is een alternatief voor een massieve ligger of voor een raatligger wanneer de extra kosten van arbeid voor het maken van het vakwerk (met name de verbindingen) opwegen tegen de besparingen op materiaal. Ook de gebruiksmogelijkheden



6.6 Massieve doorsneden van beton en hout en staal.



6.7 Raaatligger: een efficiënt materiaalgebruik.

6.3.2 Staafkrachten vanuit de V- en M-lijn

Voor een vakwerkligger kan – evenals voor elke andere ligger – een dwarskrachtenlijn en een momentenlijn worden berekend en getekend. Normaalkrachten hebben op een vakwerkligger een andere uitwerking dan op een ligger die geschematiseerd wordt als een lijn. Een vakwerkligger heeft in de berekening altijd een hoogte. Horizontale krachten grijpen aan op de boven- of op de onderrand. Deze krachten kunnen 'gewoon' worden opgeteld bij de staafkrachten die ontstaan door de andere belastingen. In de praktijk worden vakwerkliggers nauwelijks belast op (relevante) horizontale krachten. Om deze reden blijven horizontale belasting op vakwerken hier buiten beschouwing.

Voorbeeld 6.1

- **Gegeven.** Een N-ligger belast door vijf puntlasten van 2,5 kN respectievelijk 5 kN (afb. 6.22).
- **Gevraagd.** Bereken de staafkrachten vanuit de V- en M-lijn.
- **Uitwerking.** Voor het tekenen van de V-, en M-lijn moeten eerst de oplegreacties worden bepaald. Deze zijn vanwege de symmetrie eenvoudig te bepalen:

$$R_{A,V} = R_{B,V} = \frac{2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 5}{2} = 10 \text{ kN} \uparrow$$

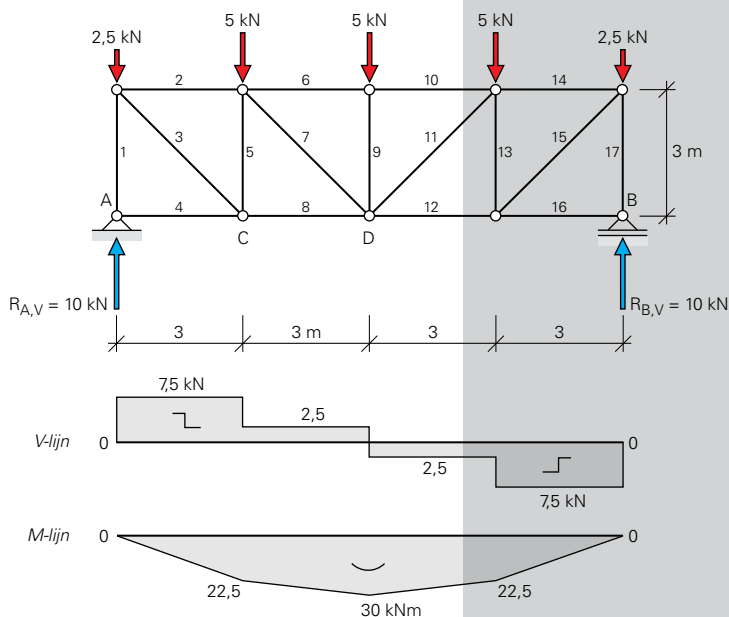
De momenten in een snede worden berekend vanuit het linkerdeel:

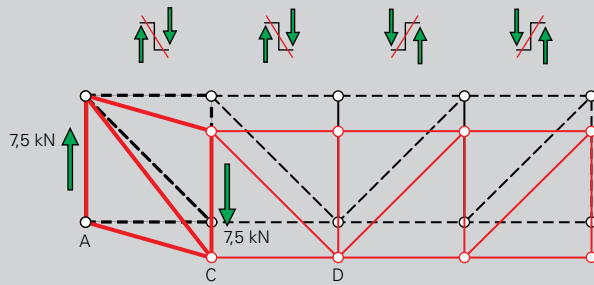
$$\text{moment om C: } M_C = 10 \cdot 3 - 2,5 \cdot 3 = 22,5 \text{ kNm}$$

$$\text{moment om D: } M_D = 10 \cdot 6 - 2,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 30 \text{ kNm}$$

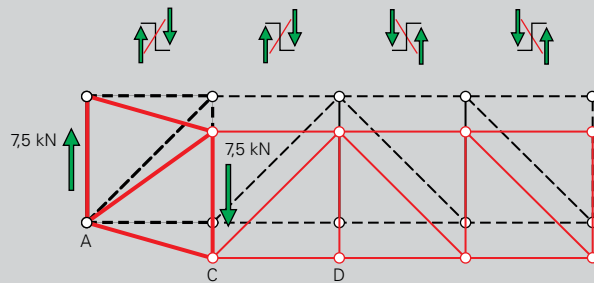
De bijbehorende V- en M-lijn is getekend in afbeelding 6.22.

6.22 Schema van een N-ligger met de V- en M-lijn.





a. trekkracht in de diagonalen



b. drukkracht in de diagonalen

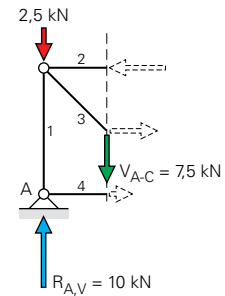
6.23 Dwarskrachtvervorming en beoordeling van de diagonaalkracht aan de hand van het afschuifteken.

Aan de hand van de V-lijn zijn de volgende conclusies te trekken.

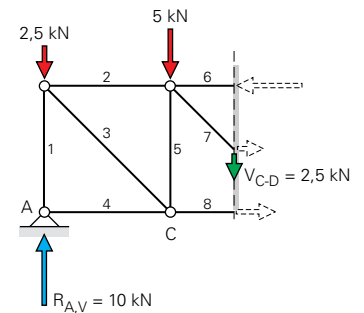
- De dwarskrachtvervorming van het eerste vak (van A naar C) ontstaat door een kracht van 7,5 kN omhoog ter plaatse van A en even grote kracht naar beneden ter plaatse van C (afb. 6.23). Wanneer de diagonaal ontbreekt, is het eerste vak niet vormvast en is de vakwerkligger instabiel. Uit de vervorming van het eerste vak van afbeelding 6.23a volgt dat de diagonaal langer wordt en dus op trek wordt belast. De diagonaal kan echter ook in de andere richting worden geplaatst. Uit afbeelding 6.23b blijkt dat de diagonaal op druk wordt belast.
- Ook het afschuifteken van de V-lijn geeft informatie over de kracht in de diagonaal. In het afschuifteken van afbeelding 6.23a-b is de richting van de diagonaal getekend. In het ene geval duidt de weergave op een trekkracht in de diagonaal, in het andere geval op een drukkracht. Het is eenvoudig in te zien dat alle diagonalen van afbeelding 6.23a op trek worden belast.
- Dwarskrachten kunnen niet door de boven- en onderrand worden opgenomen, omdat deze horizontale staven pendelstaven zijn en uitsluitend in evenwicht zijn door horizontale krachten (overeenkomstig afb. 6.19).
- Uitsluitend de krachten in de diagonalen hebben, ná ontbinden, een verticale component (afb. 6.24a-b). Uit het verticaal evenwicht $\Sigma V = 0$ van een liggerdeel blijkt dat de verticaal ontbonden component van de diagonaalkracht even groot is aan de dwarskracht in die snede. Bij diagonalen onder een hoek van 45° is de kracht in de diagonaal $\sqrt{2}$ groter dan de dwarskracht:

tussen A en C (afb. 6.24a): $V_{A-C} = 7,5 \text{ kN} \Rightarrow S_3 = 7,5\sqrt{2} \text{ kN (trek)}$

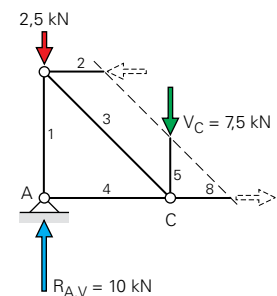
tussen C en D (afb. 6.24b): $V_{C-D} = 2,5 \text{ kN} \Rightarrow S_7 = 2,5\sqrt{2} \text{ kN (trek)}$



a. dwarskracht V_{A-C} tussen A en C



b. dwarskracht V_{C-D} tussen C en D



c. dwarskracht V_C in C

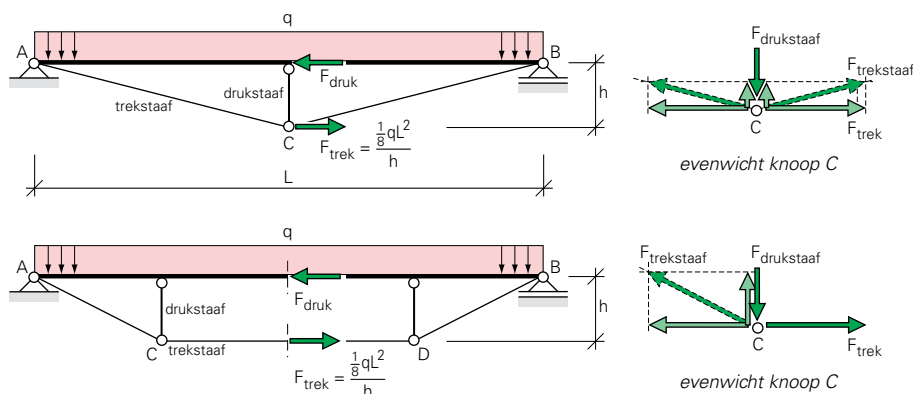
6.24 In elke snede is de verticale component van de staafkracht gelijk aan de dwarskracht in die snede.

6.4 Onderspannen liggers

Een onderspannen ligger lijkt op een vakwerkligger, maar valt vooral op door een andere vormgeving en profilering van de staven. Een onderspannen ligger heeft – net als een vakwerkligger – een onder- en een bovenrand die onderling op afstand worden gehouden door één of meer drukstaven (afb. 6.46). De onderrand wordt altijd op trek belast en slank uitgevoerd, meestal als een massieve ronde staaf. De bovenrand wordt altijd op druk belast en kan daardoor knikken. Vaak wordt de bovenrand belast door een lijnlast en/of puntlasten, waardoor in de bovenrand ook buigende momenten ontstaan. De op druk en/of buiging belaste bovenrand heeft om deze redenen een veel zwaardere profieldoorsnede dan de onderrand, die op trek wordt belast. In afbeelding 6.46a is een onderspannen ligger getekend met één drukstaaf in het midden. De krachtwerking komt in dat geval overeen met die van een vakwerkligger. Vaak heeft een onderspannen ligger twee drukstaven (afb. 6.46b). De inwendige krachtwerking komt dan maar gedeeltelijk overeen met die van een vakwerkligger.

Al in de 19e eeuw werden onderspannen liggers in kapspanten toegepast. Het Polonçeau-spant – in 1837 bedacht door de Franse spoorwegingenieur Jean-Barthélémy Camille Polonçeau (1813-1859) – bestaat uit twee schuingeplaatste onderspannen liggers, verbonden door een horizontale trekstaaf (afb. 6.47). Dit type spant maakte grote overspanningen mogelijk met een minimum aan materiaal en werd in de 19e eeuw vaak toegepast in hellende daken.

De krachtwerking in een onderspannen ligger is als volgt te verklaren. Omdat liggers doorgaans (veel) eerder op buigend moment bezwijken (en niet op dwarskracht) is het aantrekkelijk om uitsluitend de momentweerstand te vergroten. Door een «normale» ligger te onderspannen met een trekstang neemt de momentweerstand aanzienlijk toe, doordat de inwendige hefboomsarm h aanzienlijk groter wordt (zie afb. 6.46). De onderspanning werkt niet bij een omkeerbare belasting, bijvoorbeeld wanneer een (opwaartse) windzuiging op een dak groter is dan de (neerwaartse) belasting door eigen gewicht van het dak.



6.46 Onderspannen van een ligger om de momentweerstand te vergroten.



6.47 Kapsant uitgevoerd als Polonçeau-spant

De staafkrachten in de boven- en onderrand kunnen vanuit de M-lijn worden berekend, zoals in paragraaf 6.3.2 is beschreven. Ter plaatse van het maximale moment ontstaat inwendig een koppel met een arm h volgens: $M_{\max} = F \cdot h$. Dit geeft een trekkracht dan wel een drukkracht in de onder- en bovenrand met een grootte:

$$F_{\text{trek}} = F_{\text{druk}} = \frac{M_{\max}}{h}$$

In afbeelding 6.46 zijn deze krachten getekend op het linkerdeel van de constructie. De horizontale trekkracht gaat richting de oplegging altijd over in een schuine trekstaaf, waardoor de trekkracht in deze schuine staaf nog groter wordt. Dit blijkt uit het evenwicht van de knoop ter plaatse de trekstaaf met de verticale drukstaaf. De verticale drukstaaf fungeert als afstandhouder tussen de boven- en onderrand en werkt als pendelstaaf. De drukkracht in de bovenrand is over de gehele liggerlengte constant. Dit blijkt uit het evenwicht van de knopen in de bovenrand. De grootte van de oplegreacties wordt niet beïnvloed door het wel of niet onderspannen zijn van de ligger. Ook in afbeelding 6.46 zijn de oplegreactie $R_{A,V} = R_{B,V} = 0,5qL$

Wanneer de oplegreacties en de trek- en drukkrachten in de staven bekend zijn kunnen met de knooppuntmethode óf met de snedemethode de dwarskrachten in de bovenrand worden berekend. De stijfheidsverschillen tussen de boven- en de onderrand zijn groot. Een onderspannen ligger is statisch onbepaald, waardoor de vervorming van de staven (het uitrekken, indrukken en buigen) een veel grotere invloed heeft op de krachtswerking dan bij vakwerkliggers. Dat betekent bijvoorbeeld dat de buigstijve bovenrand een (klein) deel van het maximale moment opneemt, waardoor de trekkracht in de onderrand vermindert. Uitsluitend een computer (raamwerkprogramma) kan deze invloeden van de vervormingen meenemen in de berekening. Een onderspannen ligger is slank en oogt vanwege een minimum aan materiaal zéér open (afb. 6.48 en 6.49). Het verschil in dikte van de trek- en drukstaven is goed te zien, waardoor de krachtswerking 'voelbaar' wordt. Dit is een reden waarom onderspannen liggers visueel erg gewaardeerd worden.



6.48 Onderspannen liggers voor het dak van een bibliotheek.



6.49 Onderspannen ligger van een voetgangersbrug in Middelburg.

Spanningen, elastisch

Controle over de krachten in een constructie is niet mogelijk zonder controle van de spanningen. Het is de stap die volgt op het uitwendig en het inwendig evenwicht. De N-, V- en M-lijn is het uitgangspunt voor die controle (hoofdstuk 4, Inwendig evenwicht liggers). Een buigend moment (afb. 7.1) geeft eenzelfde soort spanning als een normaalkracht, terwijl een dwarskracht een heel ander soort spanning geeft. De grootte van een spanning hangt af van de grootte van de inwendige kracht én de vorm van de doorsnede. De belangrijkste doorsnedegegevens zijn oppervlakte, weerstandsmoment en traagheidsmoment.

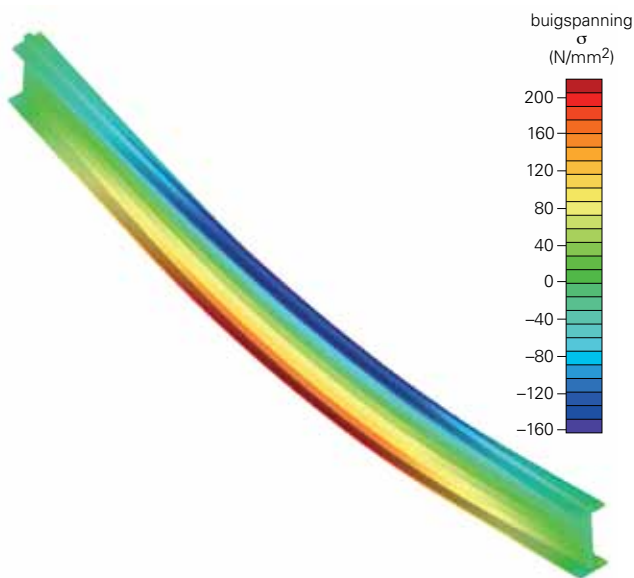
In dit hoofdstuk wordt de doorsnedegegevens afgeleid waarmee de normaalspanningen (door normaalkracht en buigend moment) en schuifspanningen (door dwarskracht) worden berekend. Daarna wordt gecontroleerd (getoetst) of de maatgevende doorsnede voldoende sterk is. Hiertoe worden de optredende spanningen (door inwendige krachten) vergeleken met de opneembare spanning (de materiaalsterkte).

In de rekenvoorbeelden worden de toetsen uitgevoerd volgens de Eurocodes, met name NEN-EN 1993 (EC3 Staalconstructies), NEN-EN 1992 (EC2 Betonconstructies) en NEN-EN 1995 (EC5 Houtconstructies). Voor het toetsen van de sterkte is het noodzakelijk het volgende te weten:

- hoe constructiematerialen worden geschematiseerd, zie hoofdstuk 11 (Schematiseren);
- wat een veilige constructie is, zie hoofdstuk 13 (Veiligheid en bruikbaarheid);
- welke belastingen er kunnen optreden, zie hoofdstuk 12 (Belastingen);
- hoe belastingen worden gecombineerd, zie hoofdstuk 14 (Belastingcombinaties).

Door een spanning zal een materiaal altijd vervormen (rekken). De berekening van de vervormingen wordt in hoofdstuk 8 (Vervormingen) beschreven. In de praktijk wordt (bijna) altijd gerekend met een lineair elastisch materiaalgedrag. Zo ook in dit hoofdstuk. De berekening wordt een lineair elastische (LE) berekening genoemd. Constructiematerialen kunnen zich ook plastisch gedragen. Met deze eigenschap wordt in hoofdstuk 9 (Meer complexe spanningstoestanden) gerekend.

7.1 Spanningen zichtbaar gemaakt in een ligger belast op buiging.



7.1 Lineair-elastische materiaaleigenschappen

Voor de sterkte- en vervormingsberekening van op trek, druk en buiging belaste constructies zijn de mechanische eigenschappen van belang. Deze eigenschappen zijn:

- sterkte f_d ;
- stijfheid (elasticiteitsmodulus E);
- taaiheid (rek ϵ bij breuk).

De mechanische eigenschappen volgen uit materiaalonderzoek en worden vastgelegd in een σ/ϵ -diagram. In hoofdstuk 11 (Schematiseren) worden deze eigenschappen uitgebreid toegelicht. Voor dit hoofdstuk is vooral de materiaalsterkte f_d van belang. De materiaalsterkte is een spanning die door het constructiemateriaal kan worden opgenomen, meestal uitgedrukt in N/mm^2 . Wat een spanning precies is, wordt in paragraaf 7.2 beschreven.

Voor de berekening van de vervorming is de materiaalsijfheid E nodig, zie hoofdstuk 8 (Vervormingen). Voor de sterkte- en vervormingsberekening wordt in de praktijk meestal een lineair verband tussen spanning σ en rek ϵ aangehouden, in formulevorm: $\sigma = E \cdot \epsilon$ (wet van Hooke). Dit lineair verband eindigt bij de elasticiteitsgrens (de materiaalsterkte).

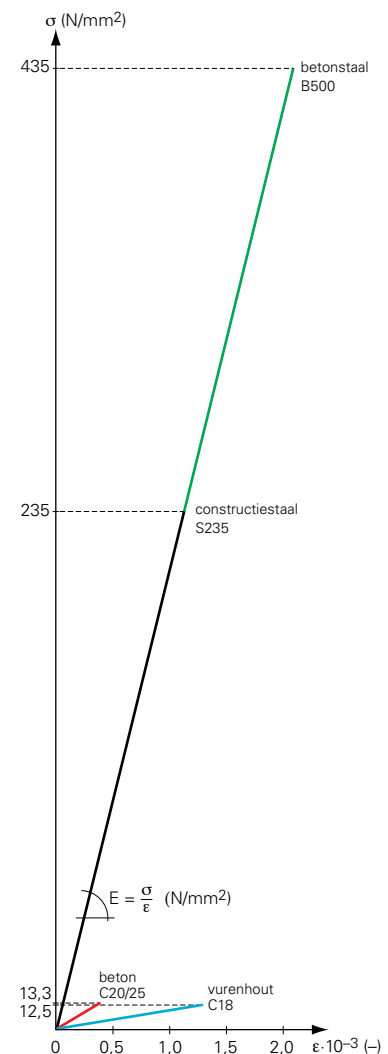
Elastisch betekent dat er bij wegnemen van de belasting geen blijvende vervorming resteert: het materiaal veert helemaal terug. Deze eigenschap is ongetwijfeld bekend van het buigen van een stalen strip of houten lat of van het uitrekken van een elastiek.

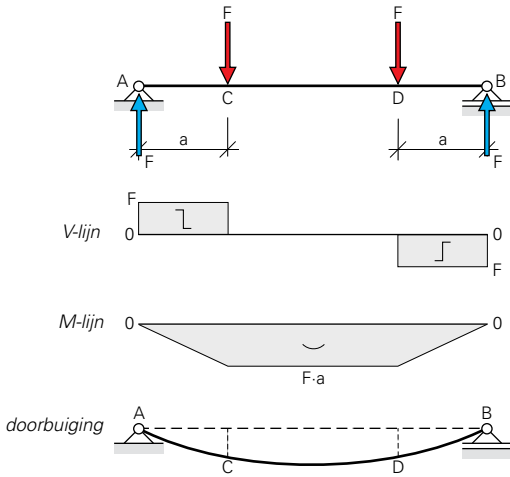
Afbeelding 7.2 toont de σ/ϵ -diagrammen van enkele veel gebruikte constructiematerialen. In volgorde van de sterkte zijn dat:

– betonstaal B500	rekenwaarde trek- en druksterkte	$f_{yd} = 435 \text{ N/mm}^2$
	elasticiteitsmodulus	$E = 200.000 \text{ N/mm}^2$
– constructiestaal S235	trek- en druksterkte	$f_y = 235 \text{ N/mm}^2$
	elasticiteitsmodulus	$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$
– beton C20/25	rekenwaarde druksterkte	$f_{cd} = 13,3 \text{ N/mm}^2$
	elasticiteitsmodulus	$E = 30.000 \text{ N/mm}^2$
– vurenhout C18, droog (binnen)	rekenwaarde buigsterkte	$f_{m,0,d} = 12,5 \text{ N/mm}^2$
	elasticiteitsmodulus	$E = 9.000 \text{ N/mm}^2$

Wat opvalt is dat staal veel sterker is dan beton en hout én tevens veel stijver is (grotere E). Stijver betekent dat bij dezelfde spanning de rek van staal kleiner is. Wat ook opvalt is dat hout in sterkte nauwelijks onderdoet voor beton op druk, maar vanwege de lagere E een grotere rek heeft dan beton bij dezelfde spanning. Bijlage C geeft een uitgebreid overzicht van de eigenschappen van veel gebruikte constructiematerialen.

7.2 σ/ϵ -diagram van enkele constructiematerialen.





7.16 Belaste ligger met zuivere buiging over liggerdeel C-D.

7.3 Spanningen door een buigend moment

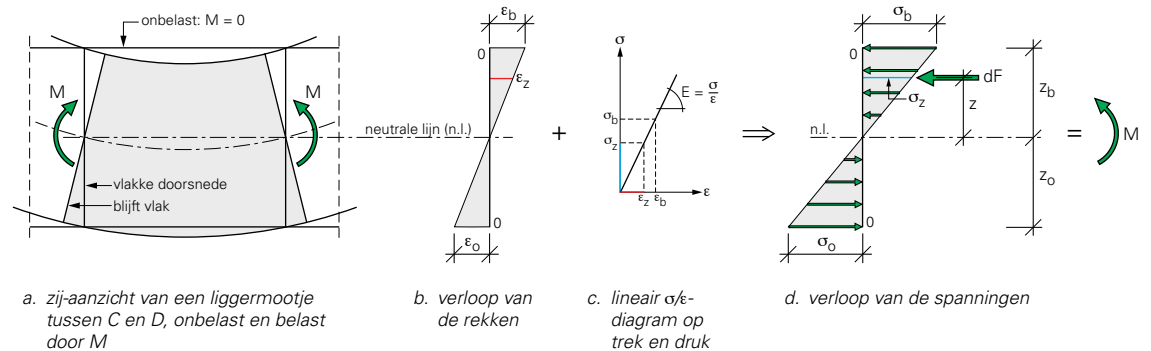
Buigende momenten treden vaak samen op met dwarskrachten. Echter in deze paragraaf wordt uitsluitend het effect van een buigend moment beoordeeld: dat betekent dat over het beschouwde liggerdeel géén normaalkrachten, dwarskrachten of wringende momenten aanwezig zijn.

De belastingtoestand van zuivere buiging ontstaat bijvoorbeeld in een situatie waarbij de ligger wordt belast door vier puntlasten: twee gelijke actiekrachten en twee reactiekrachten (afb. 7.16). Over het liggerdeel waar de dwarskracht nul is, is het buigend moment constant, zie hoofdstuk 4 (Inwendig evenwicht). In liggerdeel C-D treedt zuivere buiging op: elk liggermootje tussen C en D wordt belast op een even groot buigend moment. Omdat elk mootje op dezelfde wijze wordt belast is de doorbuigingslijn over liggerdeel C-D cirkelvormig.

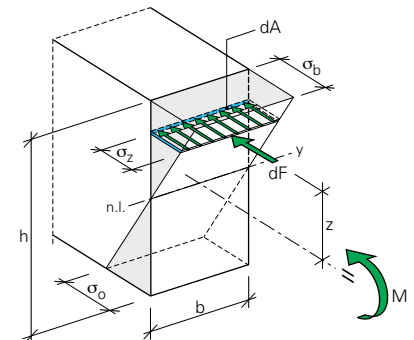
7.3.1 Elastische buigspanningen

De doorbuiging van een liggermootje ontstaat doordat in de doorsnede de materiaalvezels naar boven toe worden ingedrukt en naar onder toe worden uitgetrokken (afb. 7.17a). In elke doorsnede die op buiging wordt belast is een laag aanwezig waar de vezels hun oorspronkelijke lengte behouden. Het materiaal wordt in deze laag niet uitgetrokken, maar ook niet ingedrukt. Deze laag heet de neutrale lijn (vaak afgekort tot n.l.).

In de rechthoekige doorsnede van afbeelding 7.17 ligt de neutrale lijn vanwege symmetrie precies op de halve hoogte van de doorsnede. De neutrale lijn valt samen met het zwaartepunt van de doorsnede.



7.17 Vervorming en spanningen door zuivere buiging bij een lineair materiaalgedrag.



Bij buiging wordt aangenomen dat een doorsnede die in onbelaste toestand vlak is ook ná buiging vlak blijft (afb. 7.17a). Deze aanname staat bekend als de hypothese van Bernoulli en geldt voor alle constructiematerialen en in elk stadium van belasten, zelfs tot aan bezwijken van de doorsnede. Anders geformuleerd: de vervorming is rechtevenredig met de afstand tot de neutrale lijn. Wanneer de vervorming wordt uitgedrukt in de rek ϵ ($\epsilon = \Delta l/L$), dan is ook het verloop van de rek lineair (afb. 7.17b).

Door het indrukken en uitrekken ontstaan spanningen in de doorsnede. Omdat deze spanningen evenwijdig met de staafas lopen veroorzaakt een buigend moment normaalspanningen, net zoals dat ook gebeurt bij trek- en drukkrachten.

Het verloop van deze buigspanningen over de hoogte van de doorsnede hangt af van het verloop van σ/ϵ -diagram. Het is in de praktijk gebruikelijk dat met een (geschematiseerd) lineair σ/ϵ -diagram wordt gerekend (afb. 7.17c). De relatie tussen spanning en rek is dan: $\sigma = E \cdot \epsilon$ (wet van Hooke, waarin de elasticiteitsmodulus E een constante waarde heeft). Door het lineaire verloop van de rek (wet van Bernoulli) te combineren met het lineaire verloop van het σ/ϵ -diagram (wet van Hooke) verlopen de spanningen over de hoogte van de doorsnede ook lineair (afb. 7.17d). Constructiematerialen reageren in de lineaire tak elastisch: dat betekent dat ná het wegnemen van de belasting een op buiging belaste staaf helemaal terugveert.

Door een buigend moment ontstaan de grootste spanningen altijd in de uiterste vezels, aan de onder- en bovenrand van de doorsnede. Bij een rechthoekige doorsnede (afb. 7.17d) ligt de neutrale lijn precies op halve hoogte en is de drukspanning σ_b bovenin even groot als de trekspanning σ_o onderin de doorsnede. Wanneer de neutrale lijn niet op halve hoogte ligt, zijn de maximale spanningen boven- en onderin de doorsnede verschillend van grootte.

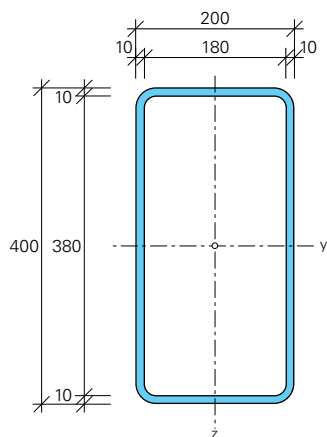
Spanningen worden berekend met behulp van een aantal doorsnedegrootheden. Voor een buigend moment zijn dat het traagheidsmoment I en het weerstandsmoment W . Deze paragraaf beschrijft hoe de buigspanningen met deze grootheden worden berekend. Aan de orde komen de volgende onderwerpen:

- de afleiding van de buigspanningsformule;
- het berekenen van het traagheidsmoment van een rechthoekige doorsnede;
- het berekenen van het traagheidsmoment met de verschuivingsregel van Steiner;
- de relatie tussen het traagheidsmoment I en het elastisch weerstandsmoment W ;
- het afleiden van het elastisch weerstandsmoment uit het verloop van de buigspanningen.

Afleiding buigspanningsformule

De grootte van de buigspanningen hangt niet alleen af van de grootte van het buigend moment, maar ook van de vorm van de doorsnede. Uit de afleiding van de buigspanningsformule volgt dan ook een doorsnedegrootheid die de vorminvloed beschrijft: dit is het traagheidsmoment I van de doorsnede. Hier is een rechthoekige doorsnede als voorbeeld genomen, maar de afleiding kan echter op elke doorsnedeform worden toegepast.

In de uiterste vezel, op een afstand z_b boven de neutrale lijn, werkt de spanning σ_b . Op de afstand z wordt in de doorsnede een mootje met een oppervlakte dA genomen (afb. 7.17d).



7.20 Rechthoekig buisprofiel.

Voorbeeld 7.5

- **Gegeven.** Een rechthoekig buisprofiel 200x400x10 (afb. 7.20).
- **Gevraagd.** Bereken het traagheidsmoment om de beide hoofdassen, waarbij de invloed van de afgeronde hoeken mag worden verwaarloosd.
- **Uitwerking.** Voor een rechthoekige massieve doorsnede volgt het traagheidsmoment uit formule (7.17). Het traagheidsmoment van het buisprofiel wordt bepaald door het traagheidsmoment van de 'holle ruimte' in mindering te brengen op dat van de massieve doorsnede:

$$I_y = I_{y,\text{massief}} - I_{y,\text{hol}} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 400^3 - \frac{1}{12} \cdot 180 \cdot 380^3 = 24359 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

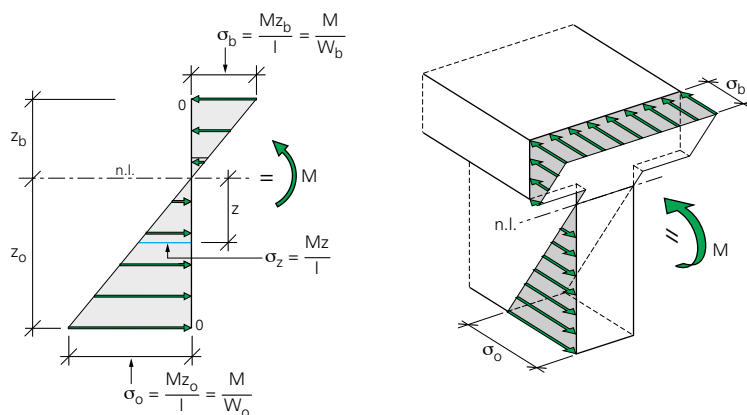
$$I_z = I_{z,\text{massief}} - I_{z,\text{hol}} = \frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 200^3 - \frac{1}{12} \cdot 380 \cdot 180^3 = 8199 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Relatie tussen het traagheidsmoment I en het elastisch weerstandsmoment W

De maximale spanningen in een doorsnede treden op in de uiterste vezels (zie afb. 7.17d). Dit volgt ook uit de formule (7.12): $\sigma = Mz/I$ wanneer voor z de uiterste vezelafstand ten opzichte van de neutrale lijn wordt ingevuld ($z = z_b$ en $z = z_o$). Voor de berekening van de maximale spanningen kan buigspanningsformule (7.12) ook worden geschreven als (afb. 7.21):

$$\sigma_b = \frac{M \cdot z_b}{I} = \frac{M}{W_b} \quad \text{met} \quad W_b = \frac{I}{z_b} \quad \left(\text{in } \frac{\text{mm}^4}{\text{mm}} = \text{mm}^3 \right)$$

$$\sigma_o = \frac{M \cdot z_o}{I} = \frac{M}{W_o} \quad \text{met} \quad W_o = \frac{I}{z_o}$$
(7.22)



7.21 Maximale buigspanningen treden altijd op in de uiterste vezels.

Hierin zijn W_b en W_o de elastische weerstandsmomenten waarmee de spanningen in de uiterste vezels worden berekend.

Een doorsnede heeft om een buigingsas altijd één (eigen) traagheidsmoment en altijd twee elastische weerstandsmomenten. Wanneer de neutrale lijn halverwege de hoogte van de doorsnede ligt, zoals bij symmetrische doorsneden, geldt: $W_b = W_o$. In de praktijk wordt met het weerstandsmoment W altijd het elastisch weerstandsmoment bedoeld.

Voor de gangbare staalprofielen en houten profielen zijn het traagheidsmoment en het weerstandsmoment om de buigingsassen y en z in tabellenboeken opgenomen. Bij asymmetrische doorsneden wordt vaak uitsluitend het kleinste weerstandsmoment opgenomen, omdat het kleinste weerstandsmoment de grootste spanning in de doorsnede geeft.

Elastisch weerstandsmoment afgeleid uit het verloop van de spanningen

De elastische weerstandsmomenten W_b en W_o zijn in afbeelding 7.21 berekend vanuit het traagheidsmoment I . Maar deze weerstandsmomenten kunnen ook direct uit het verloop van de spanningen worden afgeleid.

Voor een rechthoekige doorsnede met een lineair (elastisch) materiaalgedrag ontstaat door een buigend moment een spanningsverloop zoals in afbeelding 7.22 is weergegeven. Van het driehoekige drukspanningsfiguur boven de neutrale lijn kan een resulterende drukkracht D worden berekend volgens:

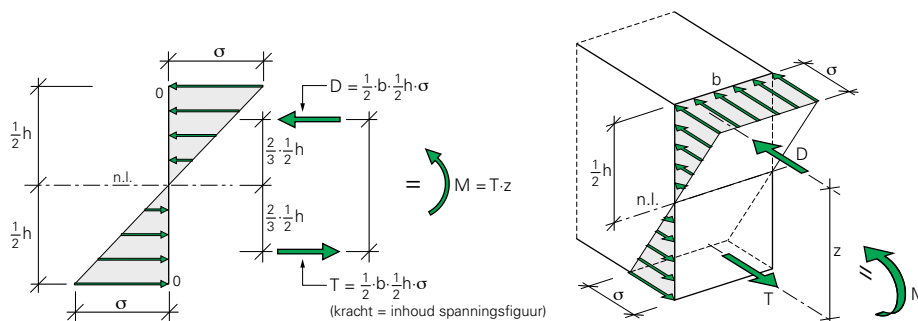
$$\text{kracht} = \text{oppervlakte} \times (\text{gemiddelde spanning}) \Rightarrow D = \left(b \cdot \frac{1}{2}h\right) \cdot \frac{1}{2}\sigma$$

Evenzo geldt voor de trekspanningsfiguur onder de neutrale lijn:

$$T = \left(b \cdot \frac{1}{2}h\right) \cdot \frac{1}{2}\sigma$$

De rechthoekige doorsnede is symmetrisch, zodat:

- de neutrale lijn op de halve hoogte ligt;
- de maximale spanningen boven en onder zijn even groot: $\sigma_b = \sigma_o = s$.



7.22 Inwendige krachswerking bij buiging van een rechthoekige doorsnede met een lineair materiaalgedrag.

7.4.1 Schuifspanningen, elastisch

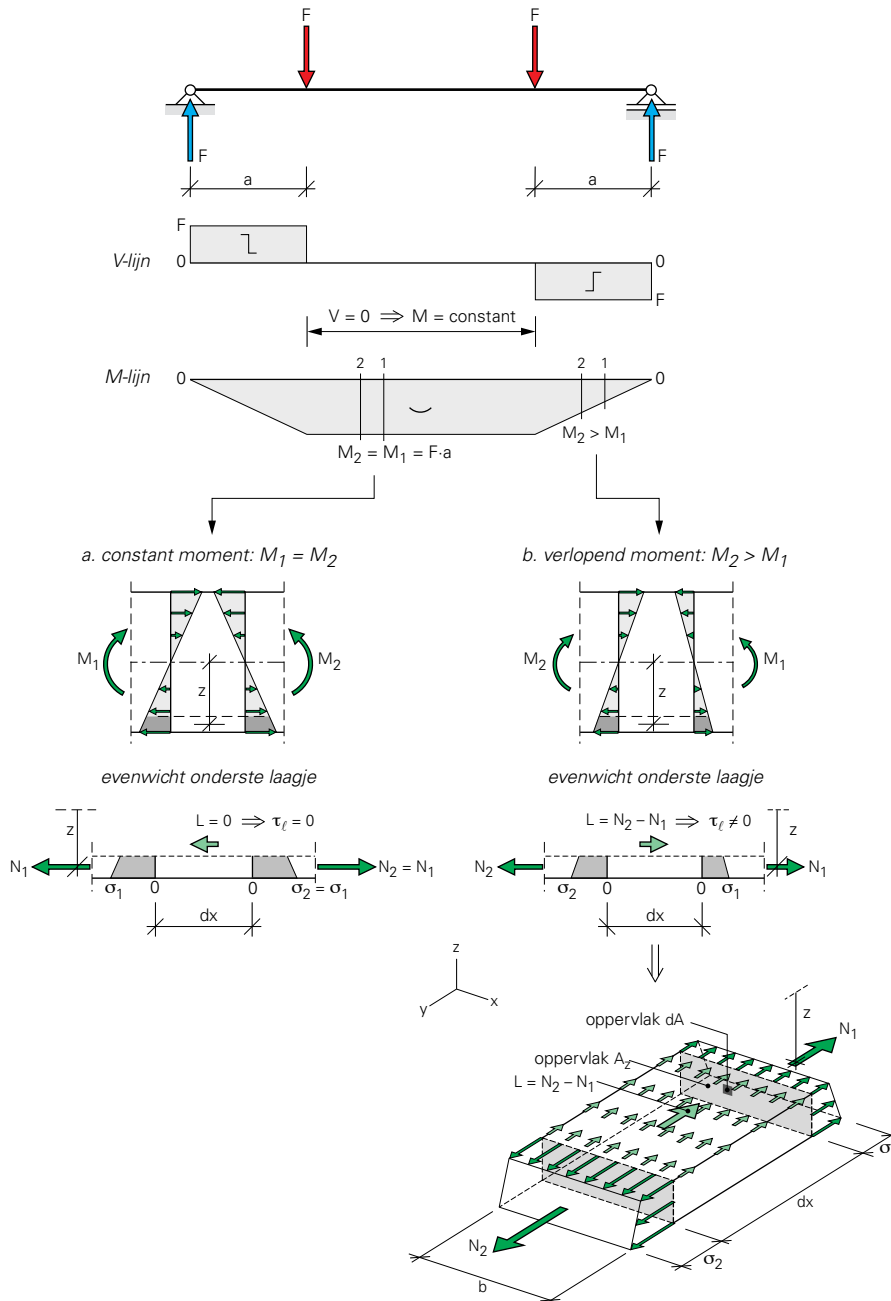
De schuifspanningsformule wordt afgeleid aan de hand van een ligger met een rechthoekige doorsnede, belast door twee puntlasten F . In afbeelding 7.45 zijn van deze ligger de V - en M -lijn getekend. Op twee plaatsen in de doorsnede wordt het ontstaan van schuifspanningen onderzocht, namelijk: in een mootje ligger met een lengte dx waar het moment constant is (afb. 7.45a) én in een mootje ligger waar het moment verloopt (afb. 7.45b). Aan de afleiding liggen twee uitgangspunten ten grondslag, die ook bij buiging zijn aangehouden:

- een vlakke doorsnede blijft na buiging vlak (hypothese van Bernoulli);
- er is een lineair verband tussen spanning en rek (wet van Hooke: $\sigma = E \cdot \epsilon$)

Uit deze twee uitgangspunten volgt dat het verloop van de buigspanningen recht evenredig is met de afstand tot de neutrale lijn.

Liggerdeel waar het moment constant is

Bij het liggerdeel tussen de twee puntlasten is het moment constant en zijn de momenten op een mootje ligger in de snede links en rechts van het mootje even groot: $M_1 = M_2$ (afb. 7.45a). Dat betekent ook dat het buigspanningsverloop over de hoogte van de doorsnede links en rechts van het mootje identiek is. Uit het evenwicht van het onderste laagje van het mootje volgt dat de buigspanningen links en rechts even groot zijn: $\sigma_1 = \sigma_2$. En dat betekent dat ook de resulterende normaalkrachten (kracht = oppervlakte $\times$ spanning) in het onderste laagje even groot zijn: $N_1 = N_2$. Het onderste laagje is precies in evenwicht, waardoor in het doorgesneden horizontale vlak geen schuifkracht L aanwezig is ($L = 0$) en dus ook geen langsschuifspanning τ_ℓ . De conclusie luidt: bij een constant moment M is de dwarskracht $V = 0$ én is de langsschuifspanning $\tau_\ell = 0$.



7.45 Langsschuifspanningen ontstaan uitsluitend bij een verlopend moment.

Liggerdeel waar het buigend moment verloopt

In een liggerdeel met een verlopend moment (afb. 7.45b) treden wel langsschuifspanningen op. Voor de afleiding van deze schuifspanningen wordt het onderste laagje van het mootje ligger beschouwd met een oppervlakte A_z . Op dit oppervlak werken volgens formule (7.12) de spanningen σ_1 en σ_2 , met een grootte:

$$\sigma_1 = \frac{M_1 \cdot z}{I_y} \quad \text{en} \quad \sigma_2 = \frac{M_2 \cdot z}{I_y}$$

Van beide spanningen kan een resulterend normaalkrachtje N worden berekend met een grootte:

$$N_1 = \int_{A_z} \sigma_1 \cdot dA = \int_{A_z} \frac{M_1 \cdot z}{I_y} \cdot dA \quad \text{en} \quad N_2 = \int_{A_z} \sigma_2 \cdot dA = \int_{A_z} \frac{M_2 \cdot z}{I_y} \cdot dA$$

Voor een verlopend moment geldt $M_2 > M_1$, zodat ook geldt: $N_2 > N_1$. Er is uitsluitend horizontaal evenwicht wanneer in het horizontale bovenvlak van het laagje – met een oppervlakte $b \cdot dx$ – een schuifkracht L werkt in de richting van de kleinste kracht N_1 met een grootte van:

$$L = N_2 - N_1 \quad \Rightarrow \quad L = \int_{A_z} \frac{(M_2 - M_1) \cdot z}{I_y} \cdot dA$$

Op het mootje ligger met een lengte dx is de term $(M_2 - M_1)$ de verandering van het moment: $dM = M_2 - M_1$, zodat:

$$L = \int_{A_z} \frac{dM \cdot z}{I_y} \cdot dA$$

Het statisch moment van het afgesneden oppervlak A_z ten opzichte van de buigingsas (y -as) is gedefinieerd als $S_{A_z} = \int_{A_z} z \cdot dA$, zodat:

$$L = \frac{dM \cdot S_{A_z}}{I_y}$$

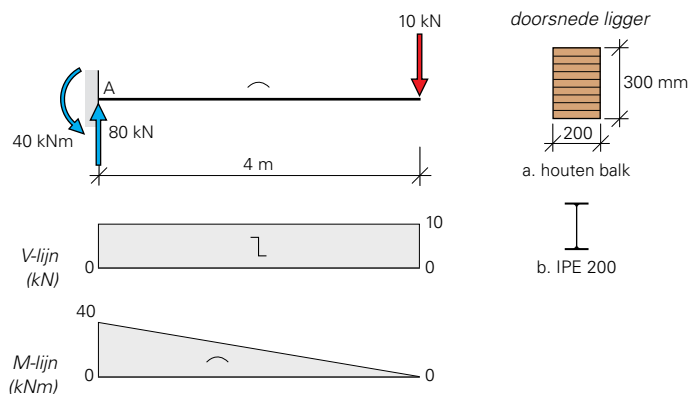
Tussen de dwarskracht V_z (in de richting van de z -as) en het buigend moment M (om de y -as) geldt de relatie $dM = V_z \cdot dx$. Dit geeft:

$$L = \frac{V_z \cdot dx \cdot S_{A_z}}{I_y}$$

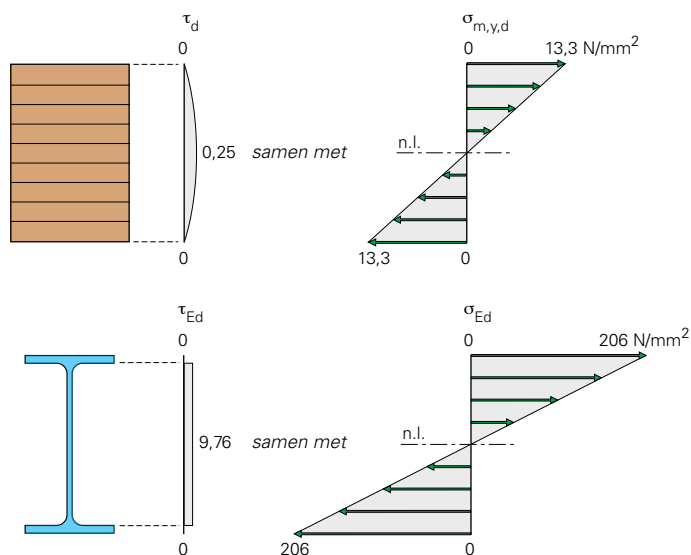
Deze horizontale schuifkracht L werkt op het horizontale bovenvlak van het laagje met een oppervlakte $b \cdot dx$. Aangenomen wordt dat de schuifkracht L zich gelijkmatig over dit oppervlak verdeeld ($dx \rightarrow 0$). De grootte van de langsschuifspanning τ_ℓ bedraagt dan:

$$\tau_\ell = \frac{L}{d_x \cdot b} = \frac{V_z \cdot dx \cdot S_{A_z}}{d_x \cdot b \cdot I_y} = \frac{V_z \cdot S_{A_z}}{b \cdot I_y} \quad (7.32)$$

Voorbeeld 7.14



Combinatie van spanningen door een dwarskracht en een buigend moment in de doorsnede ter plaatse van A:



7.51 Eénzijdig ingeklemde ligger in hout én in staal, belast door een puntlast.

• **Gegeven.** Een éénzijdig ingeklemde ligger in een gebouw wordt op het uiteinde belast door een puntlast $F_d = 10$ kN, die kortdurend aanwezig is (afb. 7.51). Aangenomen mag worden dat de ligger niet kipt. De ligger wordt uitgevoerd als gelamineerde ligger, met $b \times h = 200 \times 300$ mm, én als stalen ligger IPE 200.

• **Gevraagd.** Toets beide liggers op sterkte.

• **Uitwerking.** De toets van de liggers is hier zoveel mogelijk uitgeschreven in de stijl van een berekeningsrapport.

Uitgangspunten

houten ligger: – houtsoort: vuren, sterkteklasse GL24 met $f_{m,y,k} =$

24 N/mm², $f_{v,k} = 2,7$ N/mm² en $\gamma_M = 1,25$ (bijlage C);

– modificatiefactor: $k_{mod} = 0,9$ (binnen droog, relatieve vochtigheid $\leq 85\%$; belastingduur: kort).

stalen ligger: – staalsoort: S235 met $f_y = 235$ N/mm², afschuifsterkte = $0,58f_y$ N/mm² en $\gamma_{M0} = 1,00$ (bijlage C).

Krachtsverdeling

Uit de V- en M-lin blijkt dat de ligger ter plaatse van oplegging A het zwaarst wordt belast: een maximaal buigend moment $M_{Ed} = 40$ kNm en een maximale dwarskracht $V_{Ed} = 10$ kN (afb. 7.51). Voor de toets is deze doorsnede maatgevend.

Toets gelamineerde ligger 200x300 mm

Het buigend moment geeft normaalspanningen volgens formule (7.12) en de dwarskracht geeft schuifspanningen volgens formule (7.34):

$$\text{buiging: } \sigma_{m,y,d} = \frac{M_{Ed}}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^6}{\frac{1}{6} \cdot 200 \cdot 300^2} = 13,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{afschuiving: } \tau_d = 1,5 \frac{V_{Ed}}{A} = 1,5 \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{200 \cdot 300} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

Uit het verloop van de buig- en de schuifspanningen voor de houten ligger blijkt het volgende (afb. 7.51):

- in de uiterste vezels is de buigspanning maximaal en de schuifspanning nul;
- ter plaatse van de neutrale lijn is de schuifspanning maximaal en de buigspanning nul.

Doorsnede A kan dus 'gewoon' worden getoetst met twee enkelvoudige toetsen, namelijk: ter plaatse van de uiterste vezels op normaalspanning door het buigend moment, formule (7.26) en ter plaatse van de neutrale lijn op schuifspanning door de dwarskracht, formule (7.28).

$$\begin{aligned} \text{buiging: } \sigma_{m,y,d} \leq f_{m,y,d} &\Rightarrow \sigma_{m,y,d} \leq k_{\text{mod}} \frac{f_{m,y,k}}{\gamma_M} \\ 13,3 &\leq 0,9 \cdot \frac{24}{1,25} = 17,3 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{afschuiving: } \tau_d \leq f_{v,d} &\Rightarrow \tau_d \leq k_{\text{mod}} \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} \\ 0,25 &\leq 0,9 \cdot \frac{2,7}{1,25} = 1,94 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet}) \end{aligned}$$

Toets stalen ligger IPE 200

Het buigend moment geeft normaalspanningen volgens formule (7.12) en de dwarskracht geeft schuifspanningen volgens formule (7.35):

$$\text{buiging: } \sigma_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{W_{el,y}} = \frac{40 \cdot 10^6}{194 \cdot 10^3} = 206 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{afschuiving: } \tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{A_w} = \frac{10 \cdot 10^3}{(200 - 2 \cdot 8,5) \cdot 5,6} = 9,76 \text{ N/mm}^2$$

Uit het verloop van de buig- en schuifspanningen van de stalen ligger blijkt het volgende:

- in de uiterste vezels is de buigspanning maximaal en de schuifspanning nul;
- ter plaatse van de neutrale lijn is de schuifspanning maximaal en de buigspanning nul;
- Op de afrondingsstraal tussen het lijf en de flens is de werkelijke schuifspanning nog weinig afgenomen (zie afb. 7.48), terwijl de buigspanning met ongeveer met 15% is verminderd (afb. 7.51).

Op de afrondingsstraal lijkt een combinatie-toets van buigspanning σ_{Ed} en schuifspanning τ_{Ed} zinvol. De ervaring leert dat de afronding uitsluitend maatgevend is bij zeer grote schuifspanningen. Uit de berekening blijkt dat de schuifspanning laag is. Doorsnede A wordt daarom 'gewoon' getoetst op twee enkelvoudige toetsen, namelijk: ter plaatse van de uiterste vezels op normaalspanning door het buigend moment, formule (7.26) en ter plaatse van de neutrale lijn op schuifspanning door de dwarskracht, formule (7.38).

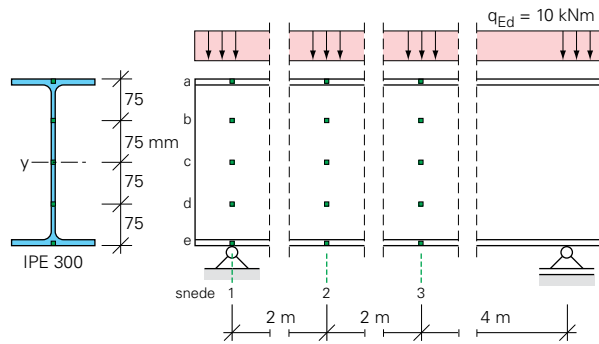
$$\text{buiging: } \sigma_{Ed} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 206 \leq \frac{235}{1,00} = 235 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$$

$$\text{afschuiving: } \tau_{Ed} \leq \frac{0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 9,76 \leq \frac{0,58 \cdot 235}{1,00} = 136 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$$

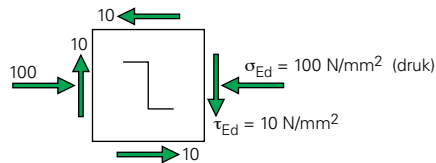
De stalen doorsnede kan ook worden getoetst met een momenttoets volgens formule (7.28) en een dwarskrachttoets volgens formule (7.37), zo blijkt achteraf. Echter het inzicht dat dit mogelijk is volgt uit het verloop van de spanningen.

Conclusie

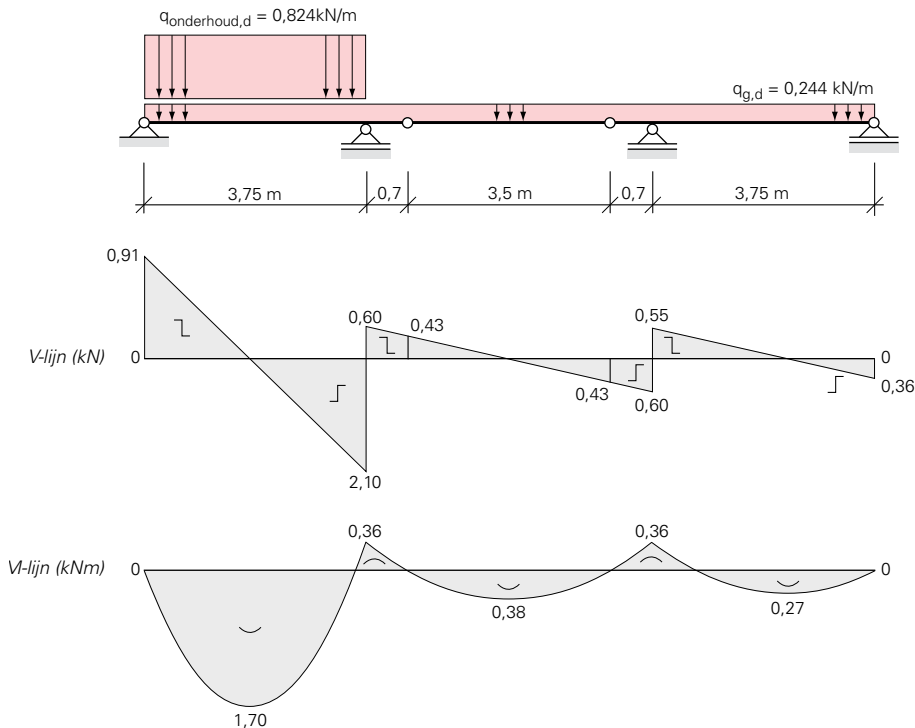
- Zowel voor de houten als de stalen ligger voldoet de afschuiftoets heel ruim. Dat bleek ook al in voorbeeld 7.12 uit de berekening van de houten en stalen liggers van de fiets- en voetgangersbrug.
- Bij 'normale' liggers is de momenttoets (altijd) maatgevend. Dat is voor ervaren constructeurs een reden de dwarskrachttoets bij 'normale' liggers achterwege te laten.



7.54 Ligger IPE 300 met elementaire deeltjes a t/m e in drie sneden.



7.55 Voorbeeld van spanningen op een elementair deeltje.



5 Een ligger IPE 300 is opgelegd op twee steunpunten en wordt belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast van $q_{Ed} = 10 \text{ kN/m}$ (afb. 7.54). In de ligger zijn in de sneden 1, 2 en 3 de elementaire deeltjes a t/m e aangegeven. Op deze deeltjes werken spanningen door de dwarskracht V en het moment M .

- Bereken en teken de V - en M -lijn.
- Bereken en teken het verloop van de spanningen in doorsnede 1, 2 en 3. Voor de dwarskracht mag met het geschematiseerde schuifspanningsverloop worden gerekend.
- Teken de spanning(en) op elk deeltje. Geef daarbij aan of het een trek of drukspanning is. Geef ook het afschuifteken aan. Gebruik het voorbeeld van afbeelding 7.55.

6 Gegeven is de overkapping van een tankstation, zie hoofdstuk 5 (Scharnierliggers en driescharnier-spanten), oefenopgave 9 en afbeelding 5.39. De overkapping bestaat uit vier houten (gelamineerde) liggers met daar overheen een houten balklaag met dakliggers (afmetingen $59 \times 156 \text{ mm}$), uitgevoerd als scharnierliggers. De maatgevende V - en M -lijn voor het toetsen van de sterkte van de dakliggers bij de belastingcombinatie 'eigen gewicht + dakbelasting (onderhoud)' is gegeven in afbeelding 7.56. De dakliggers zijn gemaakt van vurenhout in sterkteklasse C18.

- Beschrijf hoe kip van de dakliggers wordt voorkomen.
- Toets de dakligger op sterkte.

7.56 Schema van een houten vloerligger op twee steunpunten.

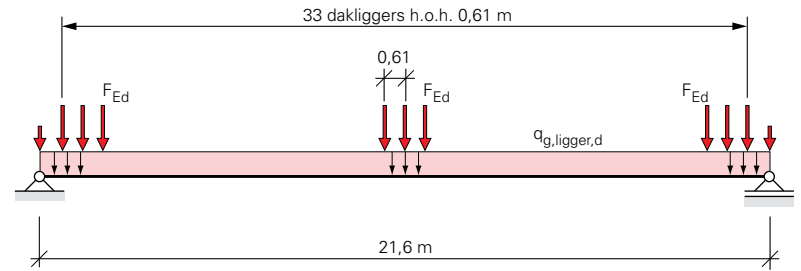
7

Gegeven zijn de houten (gelamineerde) liggers, met afmetingen 206x1200 mm, van de overkapping van het tankstation uit oefenopgave 6. Voor de gelamineerde liggers is de belastingcombinatie 'eigen gewicht + sneeuw' maatgevend. De rekenwaarde van de belasting door de dakliggers in de houten balklaag (= oplegreactie van elke dakligger) bedraagt $F_{Ed} = 3,34$ kN (afb. 7.57). De gelamineerde liggers zijn gemaakt van vurenhout (volumieke massa 500 kg/m^3) in sterkteklasse GL28. De gevolgklasse is CC1.

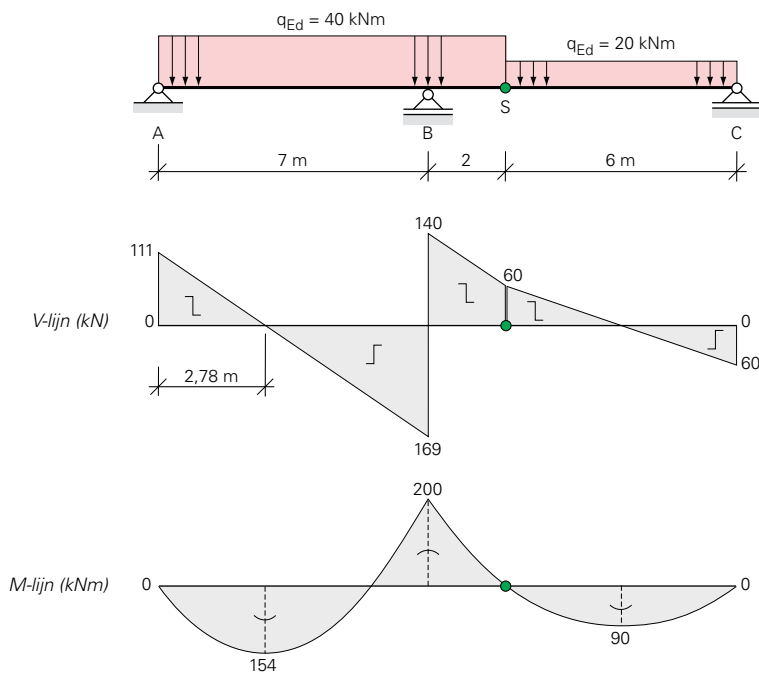
- Bereken en teken de V- en M-lijn.
- Beschrijf hoe kip van de gelamineerde liggers wordt voorkomen.
- Toets de ligger op sterkte.

8

Gegeven is het schema en de krachtsverdeling van een scharnierligger (afb. 7.58). Uit de dimensionering volgt voor beide liggerdelen een profiel IPE 360. Voor liggerdeel AS is vanuit het ontwerp het kipprobleem opgelost. Voor liggerdeel SC is de kipreductiefactor berekend op $\chi_{LT} = 0,55$. De ligger is gemaakt van de staalsoort S235. Toets de scharnierligger IPE 360 op sterkte.



7.57 Schema en krachtsverdeling van een scharnierligger IPE 360.



7.58 Schema en aanzicht van een raatligger HEA 400.