

Berekenen en ontwerpen van  
eenvoudige constructies  
van bouwwerken

# ↑ Mechanica + constructie

V.G. Keijzers

Berekenen en ontwerpen van eenvoudige  
constructies van bouwwerken

# Mechanica + constructie 1

V.G. Keijzers

# Colofon

tekst ir. V.G. Keijzers  
eindredactie ir. C.H. van Eldik / Bouwen met Staal  
vormgeving Karel Ley / Fig.84-Reclamestudio

uitgave Bouwen met Staal  
ISBN 978-90-75146-00-4  
foto omslag woontoren De StadsHeer in Tilburg van EGM architecten



Bouwen met Staal  
[www.bouwenmetstaal.nl](http://www.bouwenmetstaal.nl)

## ©Bouwen met Staal 2020

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand en/of openbaar gemaakt – in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of op enige andere manier – zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Aan de totstandkoming van deze publicatie is de uiterste zorg besteed. Desondanks zijn eventuele (druk)fouten en onvolkomenheden niet uit te sluiten. De uitgever sluit – mede ten behoeve van al degenen die aan deze publicatie hebben meegewerkt – elke aansprakelijkheid uit voor directe en indirecte schade, ontstaan door of verband houdende met de toepassing van deze publicatie.

# Illustratieverantwoording

Alle niet-genoemde foto's en alle tekeningen komen uit het archief van Bouwen met Staal. Van sommige niet-genoemde afbeeldingen is de rechthebbende onbekend. L = links; R = rechts.

Alamy Stock Photo / Lourens Smak 6.54  
Alamy Stock Photo / picturesbyrob 8.1  
Alamy Stock Photo / Tony Vingerhoets 7.61, 8.28  
ANP Photo / Wim Offermans 1.4  
Architectuurfotografie Fas Keuzenkamp 7.31  
Sandra Beckerman 8.16a  
Belgian Lifting & Equipment Company 2.12  
bestofhouse.net 4.1  
I.J.J. Broekhoven 5.18  
Corbis / Larry Lee Photography 1.6  
David Wakely Photography 6.48  
Dak & Gevel Ingenieurs 8.2  
Derix 5.17  
C.H. van Eldik 3.7, 3.8, 3.21, 4.31, 4.40, 7.60, 8.16d, 8.19, 8.27  
Emporis / Krivec 6.50  
A. Fagundes / Dreamstime.com 1.1  
Forster Profilsysteme 6.47  
Gebr. Beentjes GWW 5.40  
Genico Creactive Stairs 2.32  
Glabb 6.3  
Groot Lemmer 6.4  
De Groot Vroomshoop 5.3  
Heko Spanten 5.16  
Fotopersburo Bert Jansen 4.2  
Jos van den Bersselaar Constructie 6.5  
V.G. Keijzers 3.11, 4.34, 5.1, 5.39, 6.8, 6.10, 7.11, 7.15, 7.56, 7.65, 8.21, 8.24, 8.32  
Dick Kroesbergen 6.7  
Karel Ley / Fig.84-Reclamestudio cover, 7.6  
Jannes Linders 7.32  
Luchtfotografie / Irvin van Hemert 1.2  
Mallens Constructiebedrijf 5.38R, 7.37  
Nobutec 6.2  
Pieters Bouwtechniek 3.1  
Prequest 6.9  
W. Riemens 6.49  
Rijkswaterstaat / Joop van Houdt 8.16c  
Emiel Schoonen 2.34  
Hans Schneider 6.1  
Sean Pavone Photo 2.1  
Solid Steel Structures 1.14  
Studwelders / Composite Metal Flooring 7.29  
University of Washington Special Collections 8.15  
Van Ee Speeltoestellen 1.10  
Vissers & Partners 6.14L  
voestalpine SadeF 7.38  
Vulkers Fotografie 2.33  
www.archiexpo.com 2.28  
www.freepik.com 1.3  
Mark Yashinsky 5.2

*Mechanica + constructie 1* is een vervolg op *Kracht + vorm*. Errata, correcties, en aanvullingen op deze studieboeken zijn via [www.bouwenmetstaal.nl](http://www.bouwenmetstaal.nl) onder 'publicaties' en 'correcties (errata)' gratis te downloaden.

# Voorwoord

*Mechanica + constructie* is een mechanica- én constructieboek ineen en sluit aan op de huidige onderwijsmethoden in het hoger beroepsonderwijs (HBO), waarin vakgebieden steeds meer worden geïntegreerd. Zo ook binnen het constructieve onderwijs, waarin de mechanica direct wordt toegepast en tevens onderdeel is van het constructieve ontwerp én de constructieve berekening. Bovendien wordt van de student steeds meer zelfwerkzaamheid gevraagd. Door deze veranderende leeromgeving is een ander soort studiemateriaal nodig. Als antwoord daarop is dit boek ontstaan.

*Mechanica + constructie* is een basisboek, in Nederland bedoeld voor de eerste studiejaar van de opleidingen Bouwkunde, Civiele Techniek en de Brede Bachelor. In Vlaanderen is het boek bedoeld voor de opleiding Professionel Bachelor Bouwkunde én de bachelorjaren van de ingenieurs- en architectuur-opleidingen. Maar ook in andere hogere technische opleidingen kan het worden gebruikt. Het boek bestaat uit twee delen. In deel 1 ligt het accent op de inleiding van zowel de mechanica als het construeren. Deel 2 behandelt enkele specifieke onderwerpen van de mechanica met meer aandacht voor constructieve aspecten. *Mechanica + constructie* is een logisch vervolg op het boek *Kracht + vorm*, waarin kennis wordt gemaakt met constructies van bouwwerken, de krachtswerking daarin en het inzicht in algemene constructieve principes en oplossingen.

*Mechanica + constructie 1* behandelt de mechanica en constructieve ontwerpaspecten die horen bij de beroepsspecifieke competenties die de basiskennis van het bouwen beschrijven. De constructies zijn statisch bepaald en het materiaalgedrag voor de krachtsverdeling en toetsing is lineair-elastisch. De tekst behandelt eenvoudige constructieve voorbeelden in staal, beton en hout die zijn gericht op specifieke bouwkundige en civieltechnische deelproblemen van de mechanica, aangevuld met constructieve ontwerpaspecten en praktijkgerichte oefenopgaven. Enkele karakteristieke voorbeelden en opgaven worden in opeenvolgende hoofdstukken verder uitgebouwd tot een complete constructieve berekening. Vanaf de schematisering en de krachtsverdeling tot en met het toetsen van de sterkte en de vervorming verlopen de berekeningen volgens de notaties van de Eurocodes. Onderwerpen zoals schematisering van constructies, belastingen en materiaaleigenschappen worden – voor zover nodig – beknopt beschreven. Er wordt daarom regelmatig verwezen naar deel 2, waar deze onderwerpen uitgebreid worden behandeld. Het opstellen van de belastingcombinaties komt uitsluitend in deel 2 aan de orde.

*Mechanica + constructie 2* behandelt de mechanica van een aantal onderwerpen die thuishoren bij beroepsspecifieke competenties voor de specialisatie constructies: statisch onbepaalde constructies, meer complexe spanningstoestanden én wringing. In dit deel worden ook de mechanische materiaaleigenschappen uitgebreid beschreven, evenals het schematiseren van constructies en belastingen. Bovendien worden ook de basisbegrippen over belastingen, constructieve veiligheid en belastingcombinaties toegelicht volgens de uitgangspunten van de Eurocode. Het hoofdstuk over constructief ontwerpen formuleert de variabelen waarvoor oplossingen moeten worden bedacht bij het maken van een constructief ontwerp. Daarnaast worden vuistregels en ontwerpformules gepresenteerd voor het dimensioneren van vloeren, liggers en kolommen in staal, beton en hout.

Dit boek is mede tot stand gekomen door de inbreng van collega-docenten met jarenlange ervaring in het HBO-onderwijs Bouwkunde en Civiele Techniek. Paul van Maris (Avans Hogeschool) droeg bij aan de hoofdstukken 7 en 8. Olaf Verschuren (Hogeschool Utrecht) gaf doorlopend feedback op uiteenlopende onderwerpen. Martijn Zeegers (Hogeschool Utrecht) leverde materiaal aan voor een aantal hoofdstukken en stond – samen met Birgit Kuilenberg en Frouke de Boer (Hanzehogeschool Groningen) – aan de wieg van de hoofdstukken 2 t/m 6.

De meelezers en tevens vakdocenten Hans Sloots en Michael van Nielen (Avans Hogeschool), Michiel Horikx en Jos Falek (Hogeschool van Amsterdam), Gerrit Verkerk (Hogeschool Rotterdam), Johan Kousemaker (Haagse Hogeschool), Steven Beune (Hogeschool Saxion), Thomas Beuker en Jaap Rikken (HAN University of Applied Science), Huigert de Hoop (Hogeschool Windesheim) en Albert Repko (Hogeschool Zeeland) hebben op conceptversies reactie gegeven. Als gebruiker van een voorpublicatie leverde Merlijn Kamps (Hogeschool Rotterdam) nuttige feedback.

Suggesties en aanvullingen om specifieke Belgische aspecten toe te voegen, werden aangereikt door Koen Michiels (Infosteel). Eva Haerens (Odisee) toetste bij aanvang de overeenstemming met de Vlaamse onderwijsaanpak.

En tenslotte de uitgever en eindredacteur Cor van Eldik (Bouwen met Staal), die de verschijning van dit boek mogelijk maakte en met veel toewijding een belangrijke bijdrage leverde aan de inhoud, de structuur, de opbouw én de vormgeving van het boek.

Vincent Keijzers, september 2020



# Inhoud



<b>1 Evenwicht en eenheden</b>	<b>8</b>	<b>3.4 Eénzijdig ingeklemde, geknikte ligger</b>	<b>47</b>
1.1 Wetten van Newton	8	3.5 Parate kennisvragen	49
1.2 Newton in de bouwpraktijk	10	3.6 Oefenopgaven	49
1.2.1 Evenwicht en translatie	11		
1.2.2 Evenwicht en rotatie	12	<b>4 Inwendig evenwicht van liggers</b>	<b>52</b>
1.2.3 Berekenen van het evenwicht	14	4.1 Normalkrachten door trek (of druk)	53
1.3 Rekenen in eenheden	16	4.2 Dwarskrachten en buigende momenten door een puntlast	54
1.3.1 Basisgrootheden en afgeleide grootheden	16	4.2.1 Snedekrachten uit de evenwichtsvergelijkingen	55
1.3.2 Symbolen, eenheden en getalgrrootte in de berekening	16	4.2.2 Snedekrachten uit de krachtswerking ten opzichte van een snede	58
1.4 Parate kennisvragen	18	4.2.3 Tekenen van de V- en M-lijn	59
1.5 Oefenopgave	19	<b>4.3 Dwarskrachten en buigende momenten door een lijnlast</b>	<b>60</b>
<b>2 Krachtenleer</b>	<b>20</b>	4.3.1 Snedekrachten uit de evenwichtsvergelijkingen	60
2.1 Eigenschappen van een kracht	21	4.3.2 Snedekrachten uit de krachtswerking ten opzichte van een snede	61
2.2 Grafische en analytische methoden	21	4.3.3 Tekenen van de V- en M-lijn	61
2.3 Grafisch samenstellen en ontbinden van krachten	22	<b>4.4 Weetjes voor het berekenen en tekenen van de V- en M-lijn</b>	<b>62</b>
2.3.1 Krachtenparallelogram	22	4.5 Voorbeelden van het berekenen en tekenen van de N-, V- en M-lijn	66
2.3.2 Krachtenveelhoek	24	4.5.1 Ligger met overstek	66
2.3.3 Ontbinden van krachten	25	4.5.2 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug	70
2.4 Analytisch ontbinden en samenstellen van krachten	27	4.5.3 Eénzijdig ingeklemde, geknikte ligger	74
2.4.1 Krachten die door één punt gaan	27	4.6 Parate kennisvragen	76
2.4.2 Krachten die evenwijdig lopen	31	4.7 Oefenopgaven	77
2.4.3 Momentenstelling van Varignon	31		
2.5 Verplaatsen van een kracht	33		
2.6 Parate kennisvragen	34		
2.7 Oefenopgaven	35		
<b>3 Uitwendig evenwicht van liggers</b>	<b>38</b>		
3.1 Schematiseren	39		
3.2 Ligger met overstek	41		
3.3 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug	44		



<b>5</b>	<b>Scharnierliggers en driescharnierspanten</b>	<b>80</b>	<b>7.3</b>	<b>Spanningen door een buigend moment</b>	<b>150</b>
5.1	Scharnierliggers	81	7.3.1	Elastische buigspanningen	150
5.1.1	Ontwerpen van scharnierliggers	81	7.3.2	Toetsen van de doorsnede	160
5.1.2	Tweevelds-scharnierligger	82	7.3.3	Kipstabiliteit	165
5.1.3	Drievelds-scharnierligger	86	7.3.4	Spanningen door dubbele buiging	171
5.2	Driescharnierspanten	90	7.4	Spanningen door een dwarskracht	175
5.2.1	Ontwerpen van driescharnierspanten	90	7.4.1	Schuifspanningen, elastisch	176
5.2.2	Driescharnierspant uitgevoerd als portaalspant	92	7.4.2	Toetsen van de doorsnede	180
5.2.3	Driescharnierspant uitgevoerd als kniespant	95	7.5	Combinatie van snedekrachten	184
5.3	Parate kennisvragen	99	7.6	Parate kennisvragen	188
5.4	Oefenopgaven	100	7.7	Oefenopgaven	189
<b>6</b>	<b>Vakwerken</b>	<b>104</b>	<b>8</b>	<b>Vervormingen</b>	<b>196</b>
6.1	Efficiënt materiaalgebruik	105	8.1	Materiaaleigenschappen	197
6.2	Ontwerpen van vakwerkliggers	106	8.2	Vervorming door een normaalkracht	199
6.3	Berekenen van vakwerken	111	8.2.1	Knoopverplaatsingen in eenvoudige vakwerken	201
6.3.1	Uitgangspunten voor de berekening	112	8.3	Vervorming door een buigend moment	205
6.3.2	Staafrachten vanuit de V- en M-lijn	114	8.3.1	Doorbuiging met 'vergeet-mij-nietjes'	205
6.3.3	Staafrachten met de knooppuntmethode	118	8.3.2	Toetsen van de doorbuiging	211
6.3.4	Staafrachten met de snedemethode	124	8.4	Parate kennisvragen	218
6.4	Onderspannen liggers	130	8.5	Oefenopgaven	218
6.5	Parate kennisvragen	132			
6.6	Oefenopgaven	133			
<b>7</b>	<b>Spanningen, elastisch</b>	<b>136</b>	<b>Bijlagen</b>		
7.1	Materiaaleigenschappen	137	A	Wiskundige relaties tussen belasting en doorbuiging	224
7.2	Spanningen door een normaalkracht	138	B	Basisbelastinggevallen met 'vergeet-mij-nietjes'	242
7.2.1	Zwaartepunt van een doorsnede	139	C	Mechanische eigenschappen van constructiematerialen	246
7.2.2	Toetsen van de doorsnede	141			
7.2.3	Knikstabiliteit	145			



# Evenwicht en eenheden



1.1 De beide kantoorgebouwen Puerta de Europe in Madrid staan onder een hoek van  $15^\circ$  en zijn elk in evenwicht.



1.2 Nieuwe Betlebrug bij Muiden over het Amsterdam-Rijnkanaal. Ook tijdens de bouw moet een constructie in evenwicht zijn.

Bouwwerken – of het nu gaat om bijvoorbeeld een kantoorgebouw of een verkeersbrug (afb. 1.1 en 1.2) – moeten in evenwicht zijn. Maar wat betekent ‘in evenwicht zijn’ in de bouwpraktijk? In constructieberekeningen wordt het evenwicht beschreven met drie evenwichtsvergelijkingen. In dit hoofdstuk wordt het evenwicht ook beschouwd vanuit ‘het in balans’ zijn; een situatie die iedereen in het dagelijkse leven regelmatig ervaart.

In elke constructieve berekening moet het evenwicht worden aangetoond. De draagconstructie zal dat evenwicht moeten garanderen door weerstand te bieden aan alle er op in werkende krachten. In de bouwpraktijk worden die krachten belastingen genoemd.

De wetten van Newton – genoemd naar de Engelse natuur- en wiskundige Isaac Newton (1643-1727) – vormen de natuurkundige basis voor het berekenen van alle krachten op en in een constructie. Dit boek gaat uit van krachten in *statische* toestand, dat wil zeggen dat de constructie niet beweegt, en dus stilstaat. Het bepalen van het evenwicht van bewegende ofwel *dynamische* krachten is een stuk lastiger. Daarom worden dynamische krachten in de praktijk vaak vertaald naar statische krachten. Voorbeelden zijn windbelasting op een gebouw en remkrachten op een brug. De eenheid van kracht is newton, volgens het internationale stelsel van eenheden (SI of *Système Internationale d’unités*). Ook andere grootheden worden uitgedrukt in eenheden van het SI-stelsel. Belangrijk is deze eenheden te kennen en consequent te hanteren. Naast correct gebruik van eenheden moet je je bewust zijn van de nauwkeurigheid van de uitkomst van een formule. Welke getalsgrootte daarbij hoort wordt ook in dit hoofdstuk beschreven.

## 1.1 Wetten van Newton

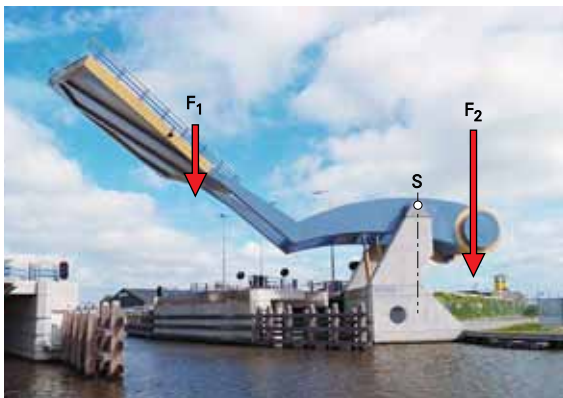
De toegepaste mechanica is gebaseerd op de vier wetten van Newton: de eerste, de tweede, de derde én de gravitatiewet. Voor het in evenwicht zijn van een constructie zijn deze vier wetten gelijktijdig van toepassing.

9. Wat is het verschil tussen een moment en een koppel?
10. Hoe wordt het moment van een koppel berekend?
11. Wat wordt verstaan onder: een grootte, een dimensie, een eenheid en een symbool?
12. Uit welke dimensies bestaat een kracht?
13. In een constructieve berekening moet schijnnaauwkeurigheid worden vermeden. Hoeveel cijfers zijn voor een uitkomst significant en geef aan waarom dat zo is.

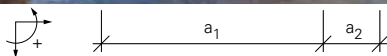
## 1.5 Oefenopgave

**1** Een veel voorkomende type beweegbare brug is de basculebrug (afb. 1.14). Zo'n brug is zo uitgebalanceerd dat het brugdek, bestaande uit het val en de hefligger ( $F_1$ , links), precies in evenwicht is met de staartligger en het ballastgewicht ( $F_2$ , rechts). De gewichten, voorgesteld als de krachten  $F_1$  en  $F_2$  grijpen aan in de zwaartepunten van de belastingen links en rechts. Volgens opgave van het staalconstructiebedrijf bedraagt het gewicht  $F_1 = 100$  ton (een oneigenlijke eenheid). De afstanden van de beide krachten in gesloten toestand tot het scharnier S bedragen:  $a_1 = 20$  m en  $a_2 = 5$  m.

- a. Bereken de grootte van gewicht  $F_2$ , vanuit het 'in balans' zijn.
- b. Bereken de grootte van gewicht  $F_2$ , door gebruik te maken van een evenwichtsvergelijking ten opzichte van scharnier S.
- c. Bereken de grootte van de verticale kracht op scharnier S, door gebruik te maken van een evenwichtsvergelijking. Gebruik hierbij de begrippen actiekracht en reactiekracht.
- d. Bereken de grootte van gewicht  $F_2$  met een evenwichtsvergelijking op afstand  $a_1$  ten opzichte van scharnier S (dit is de werklijn van de kracht  $F_1$ ).
- e. Het in beweging zetten van de brug vanuit stilstand kost kracht. Welke wet van Newton kan hiermee in verband worden gebracht en geef aan hoe lang de kracht moet worden toegevoegd.



1.14 Slauerhoffbrug over de Harlingervaart in Leeuwarden.



# 2

## Krachtenleer

Alles op aarde – en dus ook elk bouwwerk – is aan krachten onderhevig (afb. 2.1). De bekendste kracht is de zwaartekracht, maar er kunnen ook krachten optreden door bijvoorbeeld wind, een aardbeving of veroorzaakt door machines. Op een lichaam kunnen tegelijkertijd meerdere krachten werken: het effect van deze verschillende krachten is hetzelfde als dat van de *samengestelde* kracht of resultante. Het omgekeerde is dan ook mogelijk: een kracht kan worden *ontbonden* in twee of meer krachten.

Dit hoofdstuk beschrijft hoe krachten die door één punt gaan en krachten die evenwijdig aan elkaar lopen kunnen worden 'opgeteld' tot één resultante. Dit 'opstellen' kan zowel grafisch als analytisch (met een berekening). Grafische methoden worden minder vaak toegepast dan analytische methoden, maar geven wel goed inzicht in de krachtswerking van staafvormige constructies, met name hoe staafkrachten zich onderling verhouden.

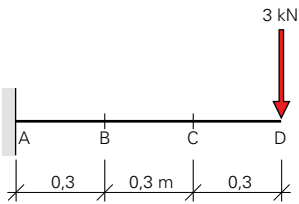
Wanneer de grootte en de ligging van de resultante bekend is, is ook de grootte en de ligging van de evenwichtmakende kracht bekend.

Het effect van een kracht (of stelsel van krachten) op een lichaam is een translatie en/of een rotatie. In een evenwichtssituatie heffen alle krachten samen de translatie en de rotatie op:  $\Sigma F = 0$  en  $\Sigma M = 0$ ; zie hoofdstuk 1 (Evenwicht en eenheden).

Voor de beschrijving van het evenwicht ten aanzien van rotatie vormt de momentenstelling van Varignon een belangrijke basis voor het berekenen van de evenwichtmakende krachten ter plaatse van de opleggingen.



2.1 De 600 m hoge Canton Tower in Guangzhou (China) wordt zowel horizontaal (wind) als verticaal (eigen gewicht van constructie, inrichting en aanwezige personen) belast.

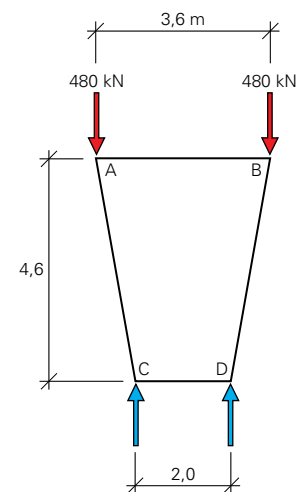


2.32 Trap in een woning met éézijdig uitkragende treden.

- 4 De treden van een trap in een woning zijn aan één zijde (A) ingeklemd in een wand. Op het uiteinde (D) wordt de trede belast op een verticale kracht van 3 kN (afb. 2.32).
- Bereken de krachten (een moment is ook een kracht!) die in snede C werken en teken liggerdeel AC met de krachten die op snede C werken.
  - Bereken de krachten die in snede B werken en teken liggerdeel AB met de krachten die op snede B werken.
  - Bereken de krachten die in snede A werken en teken knoop A met alle krachten die op knoop A werken (actie- en reactiekrachten).

- 5 Een loopbrug tussen twee schoolgebouwen ligt aan één zijde op een betonnen trapeziumvormige ondersteuningsconstructie (afb. 2.33). Op de bovenrand van de ondersteuningsconstructie grijpen vanuit de opleggingen van de loopbrug twee krachten aan van elk 480 kN. De vragen gaan uitsluitend over het effect van de oplegkrachten van de loopbrug op de ondersteuningsconstructie; het eigen gewicht van ondersteuningsconstructie blijft buiten beschouwing.
- Teken voor knoop A een krachtenparallelogram en bereken de kracht in de bovenbalk (AB) en in de schuine kolom (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is.
  - Bereken voor knoop C de reactiekracht vanuit de fundering. Teken vervolgens voor knoop C een krachtenparallelogram en bereken de kracht in de onderbalk (CD) en in de schuine kolom (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is.
  - Teken voor knoop C twee verschillende krachtenveelhoeken, waarbij de kracht vanuit de fundering evenwicht maakt met de kracht in de onderbalk (CD) en in de schuine kolom (AC).
  - Er is een voorstel om het ontwerp van de ondersteuningsconstructie aan de passen door van het trapezium een driehoek te maken. De lengte van de onderbalk CD wordt dan teruggebracht van 2 m naar 0 m. Wat betekent dit voorstel voor de grootte van de kracht in de bovenbalk en in de schuine kolom? Licht je antwoord toe door het op schaal schetsen van het krachtenparallelogram voor het trapezium en voor de driehoek.

2.33 Loopbrug van het Mondriaancollege in Den Haag met links de trapeziumvormige ondersteuningsconstructie.



# 3

## Uitwendig evenwicht van liggers

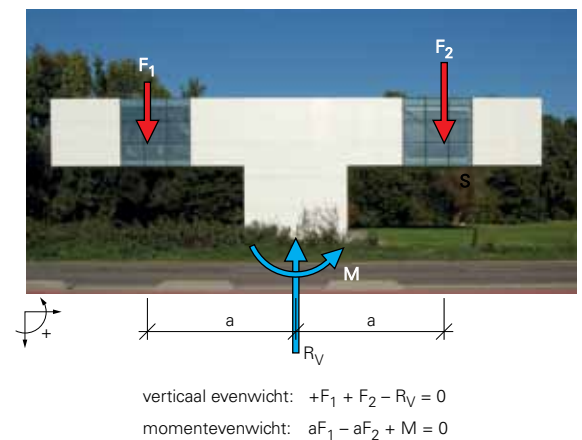
Een constructie is in evenwicht wanneer is voldaan aan de eerste wet van Newton (traagheidswet): de som van alle krachten die op een lichaam werken moeten gelijk zijn aan nul ofwel  $\Sigma F = 0$ , zie hoofdstuk 1 (Evenwicht en eenheden). Op basis van deze wet volgen voor de bouwpraktijk de drie evenwichtsvoorwaarden:

- de som van alle verticale krachten moet gelijk zijn aan nul:  $\Sigma V = 0$
- de som van alle horizontale krachten moet gelijk zijn aan nul:  $\Sigma H = 0$
- de som van alle momenten moet gelijk zijn aan nul:  $\Sigma M = 0$

In hoofdstuk 2 (Krachtenleer) is beschreven dat de resulterende kracht van een stelsel van krachten wordt bepaald met de momentstelling van Varignon. Deze momentstelling wordt in dit hoofdstuk gebruikt om de evenwichtmakende kracht(en) te berekenen.

Alle krachten die uitwendig als actiekracht op een constructie werken – bijvoorbeeld als gevolg van de zwaartekracht en door wind – worden de ‘belastingen’ genoemd (afb. 3.1). Deze belastingen moeten door de constructie worden opgenomen en afgevoerd naar de ‘opleggingen’ van de constructie: dat zijn de plaatsen waar de constructie vastzit aan de omgeving. Ook de krachten ter plaatse van de opleggingen zijn uitwendige krachten: deze krachten heten ‘oplegreacties’, analoog aan de derde wet van Newton (actie = reactie).

3.1 Aan twee zijden uitkragende verdieping (van een tentoonstellingspaviljoen) in evenwicht.



### 3.3 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug

De constructie van een fiets- en voetgangersbrug over een singel is opgebouwd door een stapeling van een aantal staafvormige elementen (afb. 3.7). Het dek is opgebouwd uit vijf hardhouten langsliggers met daarop in dwarsrichting hardhouten planken. Elke houten langsligger levert een geconcentreerde belasting (puntlast) op een betonnen onderslagbalk (afb. 3.8). De houten langsliggers zijn vrij opgelegd op de onderslagbalk. De betonnen onderslagbalk ( $b \times h = 300 \times 350 \text{ mm}^2$ ) is opgelegd op twee betonnen funderingspalen. Deze palen hebben bóven de bodem van de singel de functie van kolom en ín de bodem de functie van funderingspaal.

De verbinding (een paar stekken betonstaal) tussen de betonnen funderingspalen en de prefab betonnen onderslagbalk maakt het mogelijk dat de balk vrij kan doorbuigen op de palen. Bij een verticale belasting buigt de balk iets door en willen de opleggingen (de palen) een heel klein beetje zijdelings verplaatsen. De palen verhinderen deze zeer geringe verplaatsing niet of nauwelijks, omdat ze een aantal meters boven de grond uitsteken en meebuigen. Daarnaast geeft de grond waarin de palen staan relatief gemakkelijk mee.

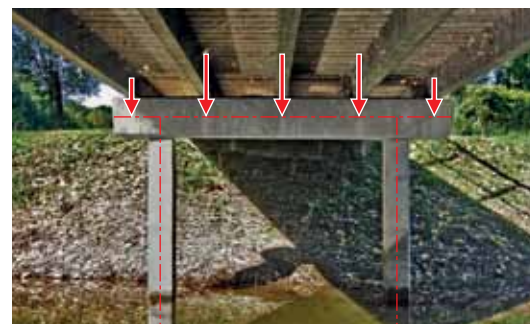
Voor het berekenen van de uitwendige krachten wordt de onderslagbalk eerst 'vrij gemaakt' van zijn omgeving (de hardhouten langsliggers en de funderingspalen). Het 'vrij lichaam schema' (VLS) van de betonnen onderslagbalk is eenvoudig: een lijn opgelegd op een scharnier en een rolscharnier met daarop de vijf puntlasten van het brugdek (afb. 3.9). De scharnieren in het schema geven aan dat de onderslagbalk kan roteren op de funderingspalen (en dus niet of nauwelijks wordt ingeklemd). Het rolscharnier geeft aan dat de opleggingen zijdelings kunnen verplaatsen. Er mag ook maar één rolscharnier worden getekend, omdat anders de constructie instabiel is. Het maakt voor de krachten in en op de ligger niet uit of het rolscharnier links of rechts wordt getekend.

De belastingen op de onderslagbalk ontstaan door:

- eigen gewicht van de betonnen onderslagbalk zelf: dit is een gelijkmatig verdeelde lijnlast  $q$ ;
- eigen gewicht van het houten brugdek (langsliggers en planken) in combinatie met de verkeersbelasting op het brugdek: dit zijn de puntlasten  $F_1$  en  $F_2$ .



3.7 Fiets- en voetgangers brug over een singel.



3.8 Krachten vanuit de houten langsliggers op de systeemlijn van de betonnen onderslagbalk.

De rekenwaarden van de belastingen voor de sterkteberekening zijn vastgesteld op:

- $F_1 = 13,8 \text{ kN}$  oplegreactie houten randliggers
- $F_2 = 24,8 \text{ kN}$  oplegreactie houten tussenliggers
- $q = 2,90 \text{ kN/m}$  eigen gewicht betonnen onderslagbalk

Merk op dat het korte stuk dat de onderslagbalk buiten de langsliggers uitsteekt voor de eenvoud van de schematisering is verwaarloosd. Dit is verantwoord, omdat de belasting door het eigen gewicht relatief klein is en het verwaarlozen van dit stukje balk het berekeningsresultaat nauwelijks beïnvloed. De onderslagbalk moet uitwendig in evenwicht zijn. De oplegreacties zijn de enige, nog onbekende krachten.

### Gevraagd: bereken de oplegreacties

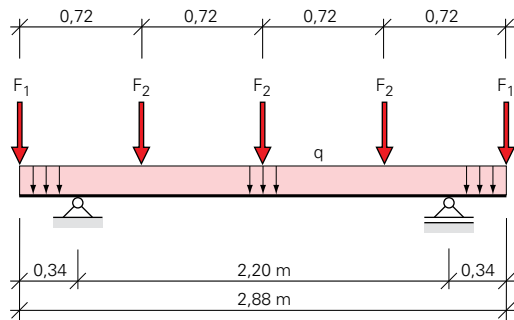
De berekening van de oplegreacties verloopt in drie stappen.

#### 1. Teken de oplegreacties in het schema

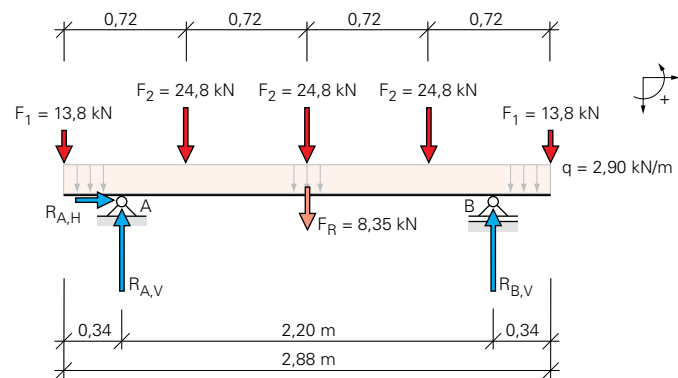
Neem de oplegreacties alvast in de juiste richting aan, wanneer dat inzicht aanwezig is (afb. 3.10). Na de berekening volgt de juistheid van de aanname.

#### 2. Bereken de grootte en de plaats van de resultante van de q-last

Voor het berekenen van de oplegreacties wordt de q-last vervangen door een puntlast  $F_R$ , die in het zwaartepunt van de q-last aangrijpt. De puntlast heeft voor het berekenen van de oplegreacties hetzelfde effect als de q-last. De grootte van  $F_R$  bedraagt  $F_R = q \text{ kN/m} \cdot 2,88 \text{ m} = 2,90 \cdot 2,88 = 8,35 \text{ kN}$ . De plaats van  $F_R$  ligt op  $2,88 \text{ m} / 2 = 1,44 \text{ m}$  vanaf de rand (links of rechts). De schematisering waarbij de q-last is vervangen door een resulterende kracht  $F_R$  is weergegeven in afbeelding 3.10.



3.9 Constructie- en belastingschema van de betonnen onderslagbalk



3.10 Schema van de onderslagbalk met de belastingen en de onbekende oplegreacties  $R_{A,H}$ ,  $R_{A,V}$  en  $R_{B,V}$ .

7

In een woonblok ligt boven elke entree van twee woningen een stalen latei HEA 140 (afb. 3.21). De dagmaat van de muuropening bedraagt 3,6 m. De latei draagt het bovenliggende metselwerk van de gevel. Het metselwerk is 100 mm dik en heeft een hoogte van 1,1 m. Daarnaast ondersteunt de latei via een schuingeplaatste stalen staaf de zonwering. De staaf maakt een hoek van 15° met de gevel (afb. 3.22). De rekenwaarden van de gelijkmatig verdeelde belasting  $q$  (door metselwerk buitenblad en stalen latei) en de puntlast  $F$  (stalen staaf) voor de sterkteberekening zijn vastgesteld op:

latei	$q_1 = 2,48 \text{ kN/m}$	halfsteens metselwerk buitenblad
	$q_2 = 0,27 \text{ kN/m}$	eigen gewicht HEA 140
stalen staaf: $F_1 = 2,46 \text{ kN}$		eigen gewicht zonwering
$F_2 = 3,52 \text{ kN}$		windbelasting op zonwering (neerwaarts)

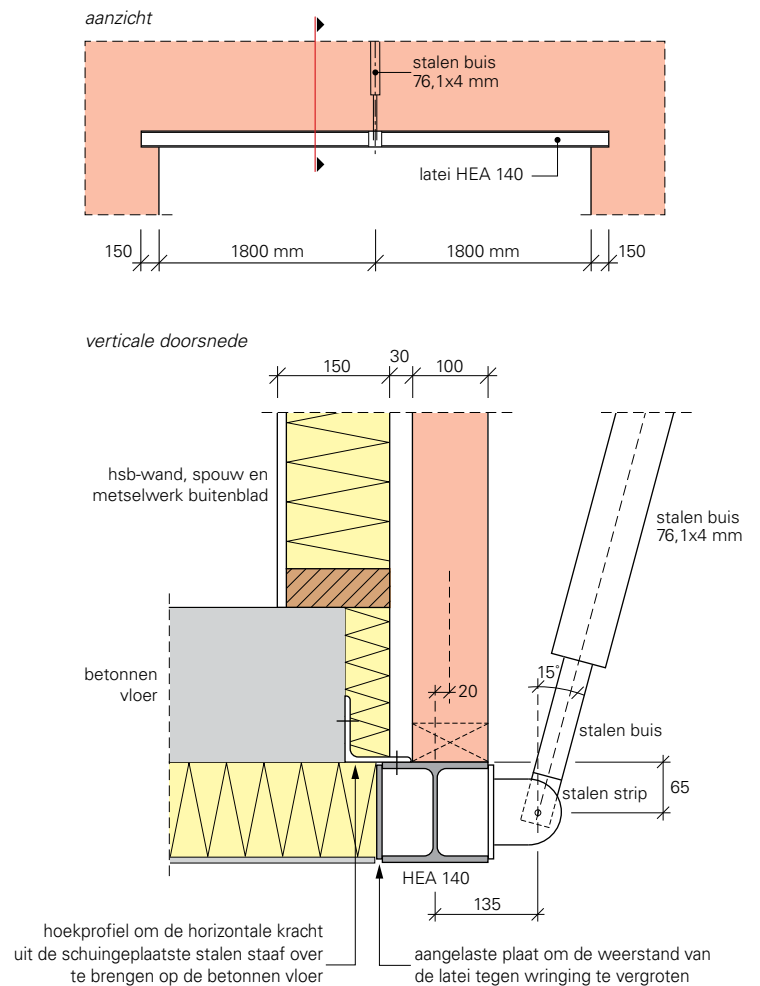
De beide puntlasten  $F$  werken in de as van de schuingeplaatste staaf en oefenen daardoor behalve een verticale óók een horizontale kracht uit op de latei. De horizontale kracht wordt via een stalen hoekprofiel achter de latei afgevoerd op de betonnen verdiepingvloer. De horizontale kracht grijpt excentrisch aan op ongeveer 65 mm ten opzichte van het hoekprofiel (vanaf de halve hoogte van de latei). De verticale kracht heeft ten opzichte van het lijf van de latei een excentriciteit van 135 mm. Door beide krachten wordt het profiel HEA 140 op wringing belast. Ook het gemetselde buitenblad belast de latei excentrisch, doordat het zwaartepunt van het metselwerk (= hart steen) aangrijpt op ongeveer 20 mm ten opzichte van het lijf van het profiel HEA 140. Ook hierdoor ontstaat wringing. Omdat een I-profiel weinig wringing kan opnemen, is aan de binnenzijde van de latei over de gehele lengte een plaat gelast. Zo ontstaat een kokerprofiel dat wél wringing kan opnemen. Met wringing hoeft echter bij deze opgave niet te worden gerekend.

- Maak het 'vrij lichaam schema' (VLS) van de stalen latei HEA 140. Houd daarbij voor de theoretische overspanning het hart van de oplegging aan.
- Bereken de oplegreacties van de latei.

3.22 Maatvoering en principe-detail van de stalen latei HEA 140 met de aansluiting van de schuingeplaatste staaf (ronde buis).



3.21 Latei boven de entree van twee woningen in een woonblok.





# 4

## Inwendig evenwicht van liggers

Een constructie moet altijd in evenwicht zijn, tenzij het de bedoeling is dat een constructie ook kan bewegen. Denk bijvoorbeeld aan een basculebrug tijdens het openen of sluiten van de brug. Het in evenwicht zijn van een constructie geldt niet alleen voor het gehele bouwwerk, maar ook voor de afzonderlijke elementen waaruit een constructie bestaat, zoals kolommen, liggers en vloer- en dakplaten (afb. 4.1).

Na het beoordelen van de uitwendige krachten die werken op de gehele constructie – of op een afzonderlijk element van de constructie – wordt het *uitwendig* evenwicht bepaald, zie hoofdstuk 3 (Uitwendig evenwicht van liggers). Uit de berekening van het uitwendig evenwicht volgen de oplegreacties. Het is ook mogelijk naar het evenwicht van *een deel* van een constructie-element te kijken. In dat geval wordt het *inwendig* evenwicht berekend. Ook hiervoor gelden de drie evenwichtsvergelijkingen:  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$  en  $\Sigma M = 0$ .



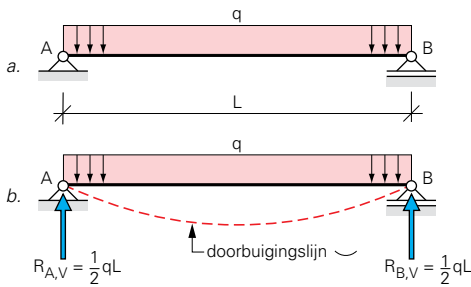
4.1 Geprefabriceerde betonnen hal in aanbouw.

Uit het inwendig evenwicht worden de krachten in doorsneden van een constructie-element berekend. Het materiaal waaruit de constructie bestaat moet weerstand bieden aan deze krachten. Wanneer de inwendige krachten te groot zijn en de materiaalsterkte wordt overschreden bezwijkt de constructie (afb. 4.2). Het toetsen van de sterkte (ook wel aangeduid met 'weerstand') wordt in hoofdstuk 7 (Spanningen) beschreven.

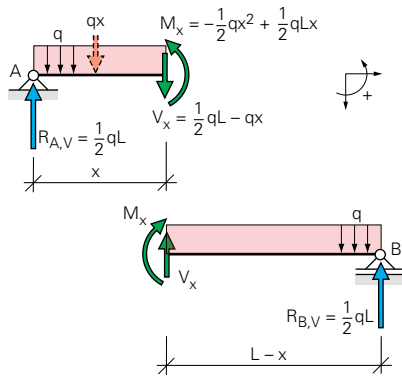
Niet elke doorsnede van een element wordt even zwaar en door dezelfde soort krachten belast. Welke inwendige krachten dat zijn, hangt af van de wijze van belasten. Uitwendige trek- of drukkrachten in de staafas (zoals een drukkracht op een kolom) veroorzaken inwendig *normaalkrachten*.



4.2 Ingestorte parkeergarage in Eindhoven (2017) doordat tijdens de bouw de inwendige krachten de materiaalsterkte overschreden.



4.11 Krachten op een ligger belast op een gelijkmatig verdeelde lijnlast.



4.12 Snedekrachten op een afstand x van oplegging A.

afstand x	$V_x$	$M_x$
0	$+\frac{1}{2}qL$	0
$\frac{1}{4}L$	$+\frac{1}{4}qL$	$+\frac{3}{32}qL^2$
$\frac{1}{2}L$	0	$+\frac{1}{8}qL^2$
$\frac{3}{4}L$	$-\frac{1}{4}qL$	$+\frac{3}{32}qL^2$
L	$-\frac{1}{2}qL$	0

4.13 Waarden van V en M van een ligger, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast.

## 4.3 Dwarskrachten en buigende momenten door een lijnlast

Afbeelding 4.11a toont een vrij opgelegde ligger op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast (q-last). Voor deze belastingsituatie – die vaak voorkomt – wordt het verloop van de V- en M-lijn onderzocht.

Uit het uitwendig evenwicht volgen de grootte van de oplegreacties  $R_{A,V}$  en  $R_{B,V}$ . Ga na dat geldt:  $R_{A,V} = R_{B,V} = 0,5qL \uparrow$  (afb. 4.11b). Er werken geen horizontale krachten op de ligger, dus de oplegreactie  $R_{A,H} = 0$ . Daarom wordt deze kracht achterwege gelaten.

Het is eenvoudig in te zien dat beide oplegreacties naar boven werken. De ligger wordt dus uitwendig belast door een lijnlast en twee krachten op de uiteinden. Daardoor buigt de ligger 'naar beneden' door met een buigteken:  $\smile$  (afb. 4.11b).

Analoog aan de belasting door een puntlast (zie paragraaf. 4.2) worden de snedekrachten berekend:

A met de drie evenwichtsvergelijkingen;

B uit de krachtswerking ten opzichte van een snede.

### 4.3.1 Snedekrachten uit de evenwichtsvergelijkingen

Ook nu weer worden sneden aangebracht om te achterhalen hoe de snedekrachten zich over de ligger ontwikkelen. Om het gedrag te beschrijven kan met één snede worden volstaan (afb. 4.12). Evenals voor het evenwicht van de gehele ligger geldt ook dat elk liggerdeel in evenwicht moet zijn. Om dit aan te tonen zijn de bruikbare evenwichtsvergelijkingen:  $\Sigma V = 0$  en  $\Sigma M = 0$ .

Om aan het evenwicht te voldoen moet in de snede op een afstand x een dwarskracht  $V_x$  en een moment  $M_x$  werken. Ook nu moeten de krachten in een snede op elk liggerdeel tegengesteld worden getekend. Het bepalen van de snedekrachten verloopt voor beide liggerdelen even snel. Voor het evenwicht van het linkerdeel geldt:

$$\Sigma V = 0 \quad -\frac{1}{2}q \cdot L + q \cdot x + V_x = 0$$

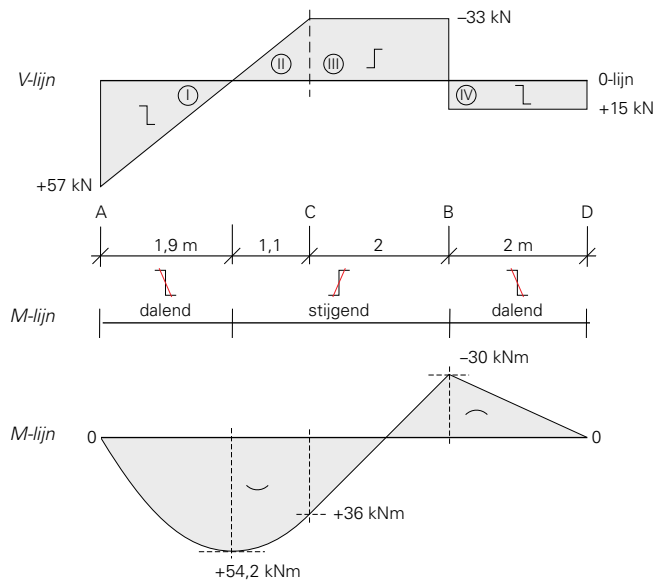
$$V_x = \frac{1}{2}qL - qx \quad (\text{lineaire vergelijking})$$

$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \quad -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - V_x \cdot x + M_x = 0$$

$$M_x = \frac{1}{2}qx^2 + \left(\frac{1}{2}qL - qx\right) \cdot x$$

$$= -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}qLx \quad (\text{tweedegraads vergelijking})$$

Met deze twee vergelijkingen kan voor elke waarde voor x over een afstand L de dwarskracht én het moment worden berekend (tabel 4.13). Uit de berekening van de tussenliggende waarden voor x blijkt het lineaire verloop van de V-lijn en het kwadratisch verloop van de M-lijn (zie afb. 4.15).



4.30 Berekening van de momenten op basis van het oppervlak van de V-lijn.

Als alternatief kunnen de momenten uit de evenwichtsvergelijking  $\Sigma M = 0$  worden bepaald (zie par. 4.3.1); deze methode wordt aan de lezer overgelaten. De momenten volgen ook uit het wiskundig verband tussen belasting, dwarskracht en moment (zie par. 4.4). De M-lijn kan namelijk worden berekend vanuit het oppervlak van de V-lijn (afb. 4.30). Het moment neemt toe, of af, met het oppervlak van de V-lijn. Aan het begin van de ligger (in A) en aan het eind (in D) is het moment nul (heeft dus geen beginwaarde). Beginnend vanaf links (in A) wordt de volgende berekening gemaakt:

$$\text{oppervlak I:} \quad M_{A-B, \max} = +0,5 \cdot 57 \cdot 1,9 = +54,2 \text{ kNm} \quad (\text{dalende M-lijn})$$

$$\text{oppervlak I + II:} \quad M_C = +54,2 - 0,5 \cdot 33 \cdot 1,1 = +36 \text{ kNm} \quad (\text{stijgende lijn})$$

$$\text{oppervlak I + II + III:} \quad M_B = +36 - 33 \cdot 2 = -30 \text{ kNm} \quad (\text{dalende M-lijn})$$

$$\text{oppervlak I + II + III + IV:} \quad M_D = -30 + 15 \cdot 2 = 0 \text{ kNm} \quad (\text{zoals verwacht})$$

Wanneer vanaf rechts worden begonnen zijn de resultaten (uiteraard) hetzelfde. Ga dit na.

## 4.5.2 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug

Gegeven is een onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug (afb. 4.31), waarvan in paragraaf 3.3 met de berekening van het uitwendig evenwicht de oplegreacties zijn bepaald. Van de onderslagbalk worden nu de inwendige krachten berekend in de relevante sneden én de N-, V- en M-lijn getekend evenals de doorbuigingslijn. De uitwerking gebeurt op dezelfde wijze als voor de ligger met overstek van paragraaf 4.5.1.

De gehele berekening met het verloop van de N-, V-, M-lijn met maximale waarden en de doorbuigingslijn is opgenomen in afbeelding 4.32. De berekening verloopt in vijf stappen.



4.31 Fiets- en voetgangersbrug over een singel.

### 1. Analyseer het probleem

Zowel de constructie als de belastingen op de constructie zijn symmetrisch. Dat betekent dat de oplegreacties in A en B even groot zijn en het verloop van de N-, V- en M-lijn 'symmetrisch' is.

De oplegreacties  $R_{A,V}$  en  $R_{B,V}$  werken naar boven. Deze belasting-situatie geeft een doorbuigingslijn zoals in afbeelding 4.32 is geschetst. Hierdoor ontstaat het inzicht in de buigtekens en de globale ligging van de buigpunten van de M-lijn (waar  $M = 0$ ). Evenals bij de ligger met overstek (zie par. 4.3.1) is het van te voren moeilijk in te schatten of de uiteinden van de overstekken naar beneden of naar boven verplaatsen.

Op twee plaatsen treedt een maximaal moment op. Boven de steunpunten is een negatief moment aanwezig en in het veld (halverwege tussen A en B) een positief moment. Dit positieve moment zal bij de gegeven verhoudingen groter zijn dan het steunpuntsmoment in A en B.

Bij het tekenen van de V- en M-lijn wordt handig gebruik gemaakt van de relaties tussen belasting, V-lijn en M-lijn (zie afb. 4.17, 4.18 en 4.21). Dit betekent dat de puntlasten horizontale lijnen in de V-lijn geven (dwarskracht is constant) en een schuin lopende M-lijn (eerstegraads vergelijking). De gelijkmatig verdeelde q-last geeft een schuin lopende V-lijn (eerstegraads vergelijking) en een gebogen M-lijn (tweedegraads vergelijking).

### 2. Bereken de oplegreacties

De oplegreacties zijn berekend in paragraaf 3.3:  $R_{A,H} = 0 \text{ kN}$ ,  $R_{A,V} = R_{B,V} = 55,2 \text{ kN} \uparrow$ . De richtingen van de oplegreacties stemmen overeen met de analyse (afb. 4.32).

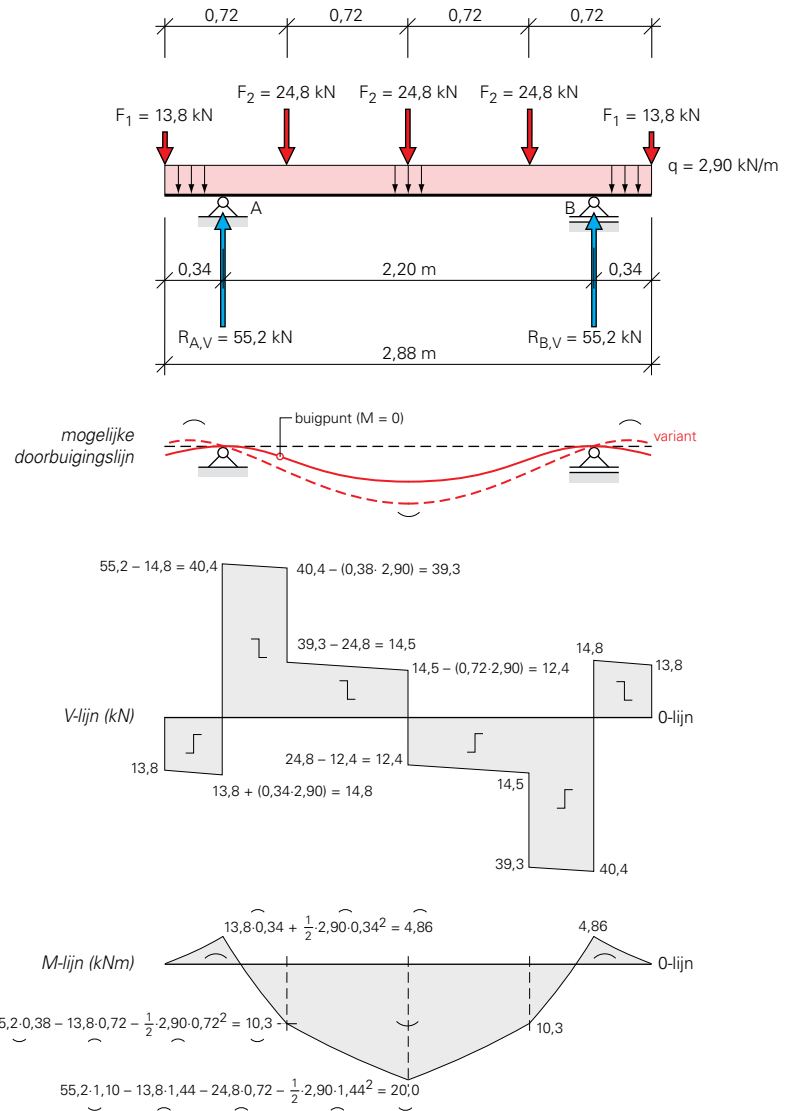
### 3. Bereken en teken de N-lijn

In de ligger zijn inwendig geen normaalkrachten aanwezig, omdat er uitwendig geen horizontale belastingen aanwezig zijn. Het tekenen van de N-lijn blijft daarom achterwege.

### 4. Bereken en teken de V-lijn

Met het tekenen van de V-lijn is aan de linkerkzijde van de ligger begonnen, zoals in de praktijk meestal gebeurt (afb. 4.32). Tussen de puntlasten is de hoek van de V-lijn hetzelfde, omdat de q-last over de gehele balk hetzelfde is (30 kN/m) en de dwarskracht elke meter afneemt met een waarde van 30 kN.

Ga na of het verloop van de V-lijn overeenstemt met de kenmerken van afbeelding 4.17 en 4.21.



4.32 Onderslagbalk met alle uitwendige krachten, de doorbuigingslijn en de berekening en tekening van de V- en M-lijn.

# 5

## Scharnierliggers en driescharnierspanten

In hoofdstuk 3 (Uitwendig evenwicht van liggers) en hoofdstuk 4 (Inwendig evenwicht van liggers) zijn statisch bepaalde liggers berekend die uit één enkele staaf bestaan, eventueel met een overstek aan één of beide kanten. Deze liggers hebben maximaal drie onbekende oplegreacties die met de drie evenwichtsvergelijkingen worden berekend.

Een *scharnierligger* is opgebouwd uit meerdere liggerdelen, die scharnierend met elkaar zijn verbonden. Een scharnierligger bevat altijd liggerdelen met een overstek. Ook scharnierliggers zijn statisch bepaald: dat betekent dat ze kunnen worden berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen. Scharnierliggers worden bijvoorbeeld toegepast in dakconstructies en als liggers van viaducten (afb. 5.1) en worden bijna altijd geprefabriceerd (in staal, beton en hout). Een scharnierligger heet ook wel een Gerber-ligger, vernoemd naar de Duitse ingenieur Henrich Gerber (1832-1912) die dit constructietype als eerste toepaste.

Een *driescharnierspant* bestaat uit twee, meestal geknikte of gebogen delen (afb. 5.2). Op de bouwplaats worden deze geprefabriceerde delen (doorgaans van staal of hout) gemonteerd met drie scharnierende verbindingen: twee aan de voeten en één in de top. Driescharnierspanten van hout hebben vaak echte scharnierende verbindingen in staal (afb. 5.3). Uitvoeringen in beton komen om economische redenen weinig voor. Driescharnierspanten zijn – evenals scharnierliggers – statisch bepaald en worden dus berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen. Ze worden bijvoorbeeld toegepast in hallen, loodsen en voor kleine fiets- en voetgangersbruggen.



5.1 Viaduct in Maasmechelen over de Zuid-Willemsvaart, uitgevoerd als betonnen scharnierligger. De tandoplegging van de ingehangen ligger is het scharnier.

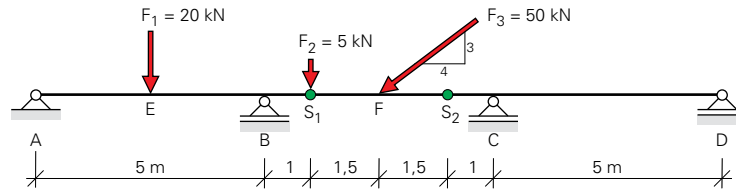


5.2 Houten driescharnierspant in boogvorm van een fietsersbrug.

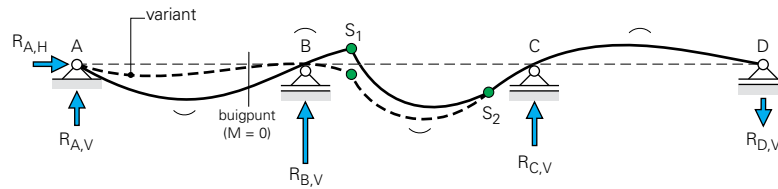


5.3 Kolomvoet van een houten spant, uitgevoerd als scharnier.

5.10 Scharnierligger met drie velden, belast door drie krachten.



5.11 Analyse van de drievelds-scharnierligger.



### 5.1.3 Drievelds-scharnierligger

Gegeven is een scharnierligger AD, die is opgebouwd uit drie liggerdelen  $AS_1$ ,  $S_1S_2$  en  $S_2D$  (afb. 5.10). De ligger wordt belast door de drie puntlasten  $F_1$ ,  $F_2$  en  $F_3$ .

Van deze scharnierligger worden de oplegreacties en de scharnierkrachten berekend, de N-, V- en M-lijn berekend en getekend én de doorbuigingslijn getekend. De berekening van de scharnierligger verloopt in zeven stappen.

#### 1. Analyseer het probleem

Schets de te verwachten doorbuigingslijn (afb. 5.11). Hierdoor ontstaat, voorafgaand aan de berekening, het inzicht in de richting van de oplegreacties, de buigtekens van de momentenlijn én de globale ligging van de buigpunten (waar  $M = 0$ ).

Puntlast  $F_3$  oefent een neerwaartse verticale kracht en een horizontale kracht naar links uit op liggerdeel  $S_1S_2$ . De rolscharnieren van de opleggingen B, C en D kunnen geen horizontale reactie leveren, zodat de horizontale component van puntlast  $F_3$  geheel door oplegging A wordt opgenomen. Vanaf het aangrijpingspunt van puntlast  $F_3$  tot aan oplegging A is in de ligger een normaaldrukkracht aanwezig.

De verticale component van puntlast  $F_3$  grijpt halverwege de overspanning van liggerdeel  $S_1S_2$  aan en geeft daarom even grote verticale krachten af in  $S_1$  en  $S_2$ . Liggerdeel  $S_2D$  buigt daardoor op tussen C en D en de oplegreactie in D werkt naar beneden. De oplegreactie in C werkt naar boven. In  $S_1$  zijn twee verticale krachten aanwezig:  $F_2$  en de helft van de verticale component van  $F_3$ . Door deze twee krachten werkt de oplegreactie in A naar beneden. Echter  $F_1$  geeft in A een opwaartse reactie. De verwachting is dat de opwaartse reactie van  $F_1$  groter is dan de neerwaartse reactie van  $F_2$  en  $F_3$ . In dat geval buigt de ligger vanaf A naar beneden door. Met weinig ervaring is dit lastig in te schatten. Oplegging B levert in elk geval een opwaartse reactie.

Of scharnier  $S_1$  naar boven of naar beneden verplaatst is lastig te voorspellen. Uitsluitend een berekening van de doorbuiging van de scharnierligger kan duidelijkheid geven. De richtingen van de buigtekens en de globale ligging van de buigpunten veranderen daar niet door.

### 3. Bereken de oplegreacties $R_{A,H}$ en $R_{B,H}$ en de scharnierkrachten $S_H$ en $S_V$ vanuit het evenwicht van de afzonderlijke spantdelen

Splits het kniespant ter plaatse van scharnier S op in twee delen (afb. 5.28) en neem een richting aan voor de scharnierkrachten. Het advies is de scharnierkrachten in de juiste richting te tekenen. De richting van de scharnierkrachten is in stap 1 beredeneerd. Na berekening volgt de juistheid van de aannamen. Let op: de richtingen van de scharnierkrachten in S moeten *altijd* tegengesteld aan elkaar worden aangehouden.

Voor elk spantdeel moeten nog drie onbekende krachten worden berekend: een horizontale oplegreactie en twee scharnierkrachten. Met de drie evenwichtsvergelijkingen zijn deze onbekende krachten te berekenen. Het maakt niet uit met welk spantdeel wordt begonnen.

Evenwicht spantdeel ACS:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{om S} = 0 & \quad -60 \cdot 8 + R_{A,H} \cdot 7,82 + 64 \cdot 4 = 0 \\ & \quad 7,82 R_{A,H} = +224 \\ & \quad R_{A,H} = +28,6 \text{ kN} \leftarrow (\text{aannname richting correct}) \\ \Sigma H = 0 & \quad +28,6 - S_H = 0 \\ & \quad S_H = +28,6 \text{ kN} \rightarrow (\text{aannname richting correct}) \\ \Sigma V = 0 & \quad -60 + 64 - S_V = 0 \\ & \quad S_V = +4 \text{ kN} \uparrow (\text{aannname richting correct}) \end{aligned}$$

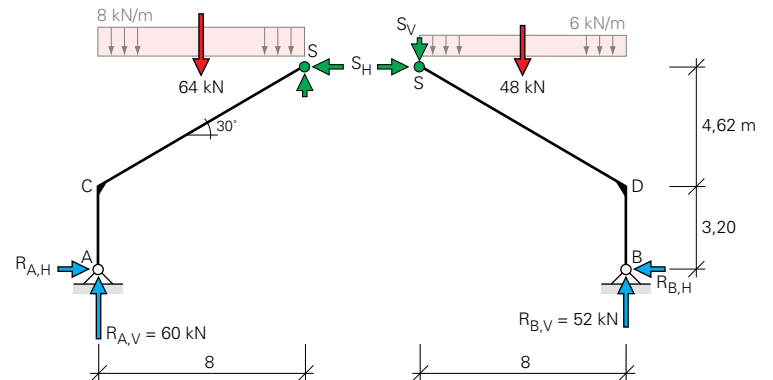
Ga na dat deze drie evenwichtsvergelijkingen ook in een andere volgorde kunnen worden toegepast.

Evenwicht spantdeel BDS:

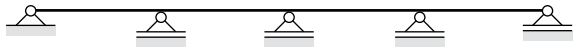
$$\begin{aligned} \Sigma M_{om S} = 0 & \quad +52 \cdot 8 - R_{B,H} \cdot 7,82 - 48 \cdot 4 = 0 \\ & \quad 7,82 R_{B,H} = +224 \\ & \quad R_{B,H} = +28,6 \text{ kN} \leftarrow (\text{aannname richting correct}) \\ \Sigma V = 0 & \quad -52 + 48 - S_V = 0 \\ & \quad S_V = +4 \text{ kN} \downarrow (\text{aannname richting correct}) \end{aligned}$$

### Conclusie

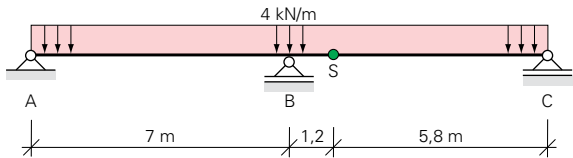
- Op de gehele constructie werken maar twee horizontale krachten:  $R_{A,H}$  en  $R_{B,H}$ . Ongeacht de grootte van de verticale belastingen zijn deze twee oplegreacties altijd even groot én tegengesteld gericht.
- Uit de berekening volgt dat het linkerspantdeel inderdaad op het rechterspantdeel leunt.
- In het geval van een symmetrische belasting zakken de beide spantdelen in de top verticaal evenveel. Er vindt geen verticale krachtsoverdracht plaats tussen beide spantdelen en geldt voor de scharnierkracht:  $S_V = 0$ .



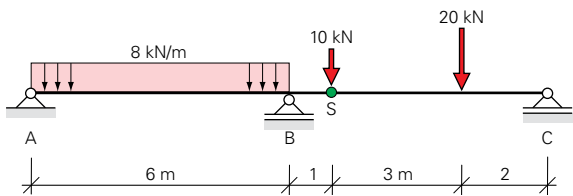
5.28 Kniespant gesplitst in twee delen met in totaal zes onbekende krachten.



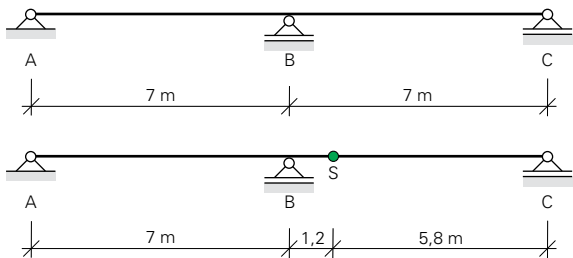
5.31 Statisch onbepaalde viervelds-ligger.



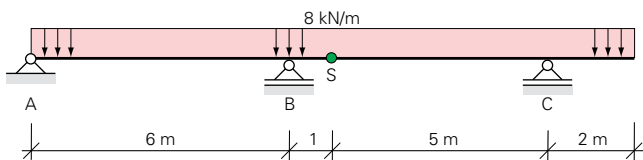
5.32 Scharnierligger met twee gelijke overspanningen.



5.33 Scharnierligger met verschillende belastingen op de velden.



5.34 Statisch onbepaald ligger en een scharnierligger.



5.35 Tweevelds-scharnierligger met een overstek.

## 5.4 Oefenopgaven

1

Gegeven is een statisch onbepaalde viervelds-ligger (afb. 5.31).  
Maak van deze ligger een scharnierligger. Teken drie oplossingen.

2

Gegeven is een scharnierligger met twee gelijke overspanningen, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast (afb. 5.32).

- Bereken de oplegreacties en de scharnierkrachten.
- Bereken en teken de N-, V- en M-lijn en geef de maximale waarden aan.
- Teken het kwalitatief verloop van de doorbuigingslijn.
- Wat valt op aan de grootte van de momenten?
- Stel dat scharnier S naar oplegging B wordt verplaatst. Hoeveel keer groter wordt dan het maximale moment in deze ligger ten opzichte van de gegeven scharnierligger?

3

Gegeven is een scharnierligger met twee gelijke overspanningen, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast en twee puntlasten (afb. 5.33).

- Bereken de oplegreacties en de scharnierkrachten.
- Bereken en teken de N-, V- en M-lijn en geef de maximale waarden aan.
- Teken het kwalitatief verloop van de doorbuigingslijn.

4

Gegeven zijn een doorgaande statisch onbepaalde ligger en een scharnierligger (afb. 5.34). Door zetting van de ondergrond zakt een oplegging.

- Teken van beide liggers de doorbuigingslijn na zinking van oplegging A.
- Teken van beide liggers de doorbuigingslijn na zinking van oplegging B.
- Wat voor gevolgen heeft de steunpuntszakking voor beide liggers?

5

Gegeven is een tweevelds-scharnierligger met een overstek aan één zijde, belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast (afb. 5.35).

- Bereken de oplegreacties en de scharnierkrachten.
- Bereken en teken de N-, V- en M-lijn en geef de maximale waarden aan.
- Teken het kwalitatief verloop van de doorbuigingslijn.



# 6

## Vakwerken



6.1 Vakwerkhuis in Alfter (Duitsland).

Een vakwerk is een constructie die geheel is opgebouwd uit staven die samen driehoeken vormen. Een driehoek is vormvast, zodat meerdere (aan elkaar geschakelde) driehoeken samen óók een vormvaste constructie zijn. Het bouwen met driehoeken is al heel oud. Zo ontstond in de Middeleeuwen de vakwerkbouw voor met name houten boerderijen en huizen (afb. 6.1). Tegenwoordig worden vakwerken in bouwconstructies meestal gemaakt van staal of van hout. De vormvrijheid is enorm groot en daarbij gelden eigenlijk geen beperkingen voor de afmetingen en de verschijningsvorm: van relatief klein en in serie vervaardigd (afb. 6.2) tot zeer groot voor een uniek ontwerp (afb. 6.3). Meestal worden vlakke vakwerken toegepast in de vorm van liggers (afb. 6.4), maar ook ruimtelijke vakwerkconstructies komen voor (afb. 6.5).



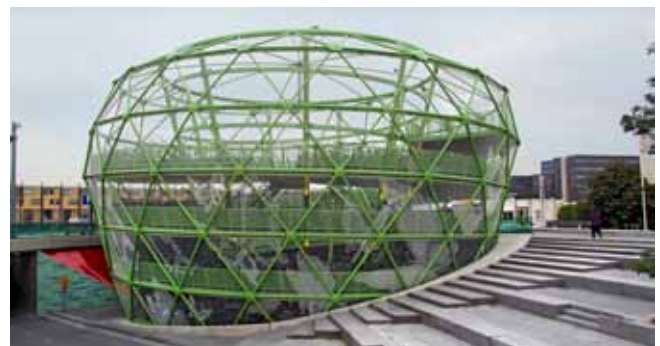
6.2 Lichte (verzinkte) stalen vakwerkliggers in een kas of serre.



6.3 Chaotianman-brug over de Yangtze bij Chongqing (China): stalen vakwerkboogbrug met een overspanning van 552 m.



6.4 Houten vakwerkliggers voor een fietsers- en voetgangersbrug.



6.5 Ruimtelijk gekromd stalen vakwerk voor een fietsenstalling in Alphen aan de Rijn.

Dit hoofdstuk beschrijft zowel het ontwerpen van vakwerken, als het berekenen van de staafkrachten in vlakke vakwerken. Een statisch bepaald ontworpen vakwerk kan vrij eenvoudig 'met de hand' worden berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma H = 0$  en  $\Sigma M = 0$ . Het berekenen wordt op drie manieren toegelicht: vanuit de V- en M-lijn, met de knooppuntmethode én met de snedemethode. Een bijzonder type vakwerk is de onderspannen ligger. Van deze visueel aantrekkelijke ligger wordt de krachtswerking verklaard.

## 6.1 Efficiënt materiaalgebruik

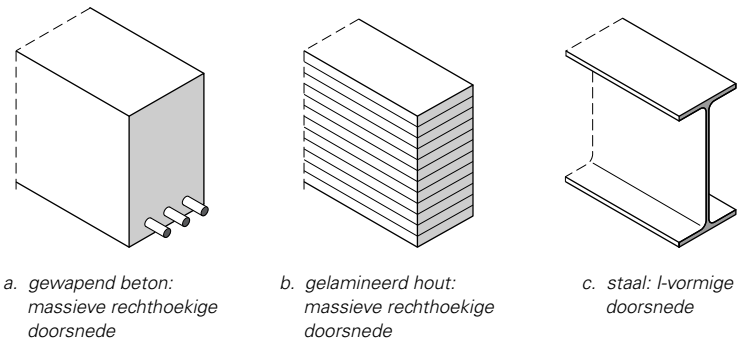
Voor relatief kleine overspanningen is het economisch om liggers met een massieve doorsneden toe te passen. Er zijn daarbij verschillende doorsnedevormen mogelijk, zoals rechthoekige liggers van gezaagd en gelamineerd hout of van gewapend beton (afb. 6.6a en b).

Een op buiging belaste ligger heeft vooral materiaal nodig aan de 'buitenzijde', namelijk daar waar in de doorsnede de spanningen het grootst zijn, zie hoofdstuk 7 (Spanningen). Dat verklaart de I-vormige doorsnede van stalen IPE- en HE-profielen (afb. 6.6c). Om dezelfde reden worden de stalen wapeningstaven in betonnen balken zover mogelijk aan de buitenzijde aangebracht (afb. 6.6a).

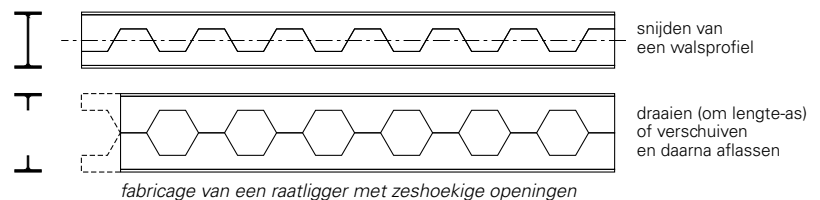
De I-vorm is de eerste stap naar een efficiënt materiaalgebruik. Ook in beton en hout is de I-vorm economisch haalbaar. Geprefabriceerde I-vormige voorgespannen liggers van beton worden veelvuldig toegepast voor grote overspanningen in bruggen en hallen. De I-vorm in hout – opgebouwd uit goedkoop plaatmateriaal en/of gezaagd hout – kan bijvoorbeeld worden toegepast als vloerligger, zelfs al bij relatief kleine overspanningen.

Het materiaalgebruik kan nog efficiënter met nóg meer materiaal aan de 'buitenzijde', zoals bij raatliggers. Deze liggers worden gesneden uit een I-vormige walsprofiel – zoals een IPE of HE – en na verschuiven (of door draaien om de lengte-as) van de twee delen ter plaatse van het lijf aan elkaar gelast. De verhoogde vorm maakt deze liggers sterker én buigstijver dan het oorspronkelijke I-profiel (afb. 6.7).

De stap naar een meer 'open' structuur van het vakwerk is daarna niet zo groot meer. Een vakwerk is een alternatief voor een massieve ligger of voor een raatligger wanneer de extra kosten van arbeid voor het maken van het vakwerk (met name de verbindingen) opwegen tegen de besparingen op materiaal. Ook de gebruiksmogelijkheden



6.6 Massieve doorsneden van beton en hout en staal.



6.7 Raatligger: een efficiënt materiaalgebruik.

## 6.3.2 Staafkrachten vanuit de V- en M-lijn

Voor een vakwerkligger kan – evenals voor elke andere ligger – een dwarskrachtenlijn en een momentenlijn worden berekend en getekend. Normalkrachten hebben op een vakwerkligger een andere uitwerking dan op een ligger die geschematiseerd wordt als een lijn. Een vakwerkligger heeft in de berekening altijd een hoogte. Horizontale krachten grijpen aan op de boven- of op de onderrand. Deze krachten kunnen ‘gewoon’ worden opgeteld bij de staafkrachten die ontstaan door de andere belastingen. In de praktijk worden vakwerkliggers nauwelijks belast op (relevante) horizontale krachten. Om deze reden blijven horizontale belasting op vakwerken hier buiten beschouwing.

### Voorbeeld 6.1

- **Gegeven.** Een N-ligger belast door vijf puntlasten van 2,5 kN respectievelijk 5 kN (afb. 6.22).
- **Gevraagd.** Bereken de staafkrachten vanuit de V- en M-lijn.
- **Uitwerking.** Voor het tekenen van de V-, en M-lijn moeten eerst de oplegreacties worden bepaald. Deze zijn vanwege de symmetrie eenvoudig te bepalen:

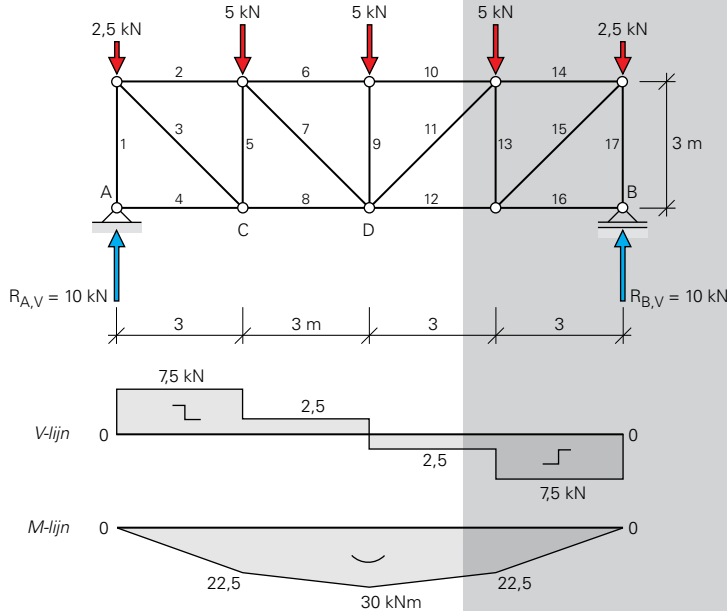
$$R_{A,V} = R_{B,V} = \frac{2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 5}{2} = 10 \text{ kN} \uparrow$$

De momenten in een snede worden berekend vanuit het linkerdeel:

$$\text{moment om C: } M_C = 10 \cdot 3 - 2,5 \cdot 3 = 22,5 \text{ kNm}$$

$$\text{moment om D: } M_D = 10 \cdot 6 - 2,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 30 \text{ kNm}$$

De bijbehorende V- en M-lijn is getekend in afbeelding 6.22.



6.22 Schema van een N-ligger met de V- en M-lijn.

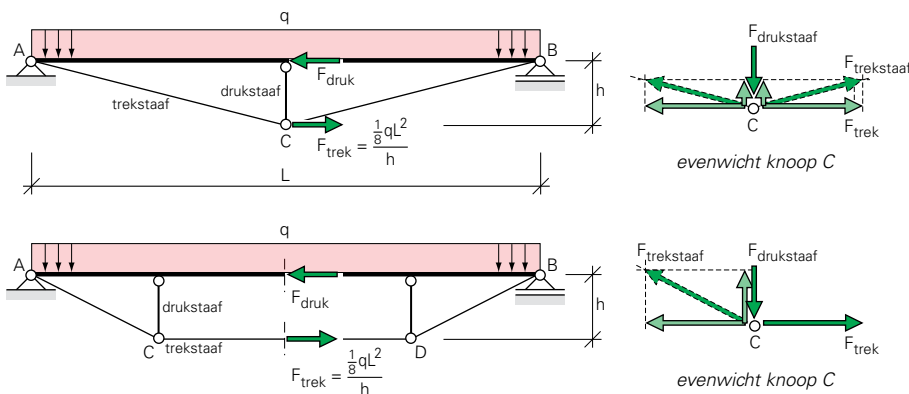
## 6.4 Onderspannen liggers

Een onderspannen ligger lijkt op een vakwerkligger, maar valt vooral op door een andere vormgeving en profilering van de staven. Een onderspannen ligger heeft – net als een vakwerkligger – een onder- en een bovenrand die onderling op afstand worden gehouden door één of meer drukstaven (afb. 6.46). De onderrand wordt altijd op trek belast en slank uitgevoerd, meestal als een massieve ronde staaf. De bovenrand wordt altijd op druk belast en kan daardoor knikken. Vaak wordt de bovenrand belast door een lijnlast en/of puntlasten, waardoor in de bovenrand ook buigende momenten ontstaan. De op druk en/of buiging belaste bovenrand heeft om deze redenen een veel zwaardere profieldoorsnede dan de onderrand, die op trek wordt belast.

In afbeelding 6.46a is een onderspannen ligger getekend met één drukstaaf in het midden. De krachtwerking komt in dat geval overeen met die van een vakwerkligger. Vaak heeft een onderspannen ligger twee drukstaven (afb. 6.46b). De inwendige krachtwerking komt dan maar gedeeltelijk overeen met die van een vakwerkligger.

Al in de 19e eeuw werden onderspannen liggers in kaspanten toegepast. Het Polonçeau-spant – in 1837 bedacht door de Franse spoorwegingenieur Jean-Barthélémy Camille Polonçeau (1813-1859) – bestaat uit twee schuingeplaatste onderspannen liggers, verbonden door een horizontale trekstaaf (afb. 6.47). Dit type spant maakte grote overspanningen mogelijk met een minimum aan materiaal en werd in de 19e eeuw vaak toegepast in hellende daken.

De krachtwerking in een onderspannen ligger is als volgt te verklaren. Omdat liggers doorgaans (veel) eerder op buigend moment bezwijken (en niet op dwarskracht) is het aantrekkelijk om uitsluitend de momentweerstand te vergroten. Door een 'normale' ligger te onderspannen met een trekstang neemt de momentweerstand aanzienlijk toe, doordat de inwendige hefboomsarm  $h$  aanzienlijk groter wordt (zie afb. 6.46). De onderspanning werkt niet bij een omkeerbare belasting, bijvoorbeeld wanneer een (opwaartse) windzuiging op een dak groter is dan de (neerwaartse) belasting door eigen gewicht van het dak.



6.46 Onderspannen van een ligger om de momentweerstand te vergroten.



6.47 Kaspant uitgevoerd als Polonçeau-spant

# Spanningen, elastisch

Controle over de krachten in een constructie is niet mogelijk zonder controle van de spanningen. Het is de stap die volgt op het uitwendig en het inwendig evenwicht. De N-, V- en M-lijn is het uitgangspunt voor die controle (hoofdstuk 4, Inwendig evenwicht liggers). Een buigend moment (afb. 7.1) geeft eenzelfde soort spanning als een normaalkracht, terwijl een dwarskracht een heel ander soort spanning geeft. De grootte van een spanning hangt af van de grootte van de inwendige kracht én de vorm van de doorsnede. De belangrijkste doorsnedegrootheden zijn oppervlakte, weerstandsmoment en traagheidsmoment.

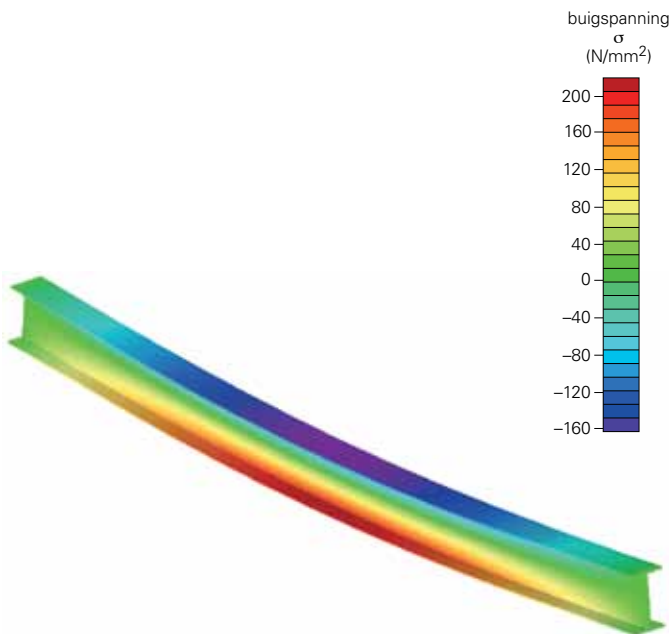
In dit hoofdstuk wordt de doorsnedegrootheden afgeleid waarmee de normaalspanningen (door normaalkracht en buigend moment) en schuifspanningen (door dwarskracht) worden berekend. Daarna wordt gecontroleerd (getoetst) of de maatgevende doorsnede voldoende sterk is. Hiertoe worden de optredende spanningen (door inwendige krachten) vergeleken met de opneembare spanning (de materiaalsterkte).

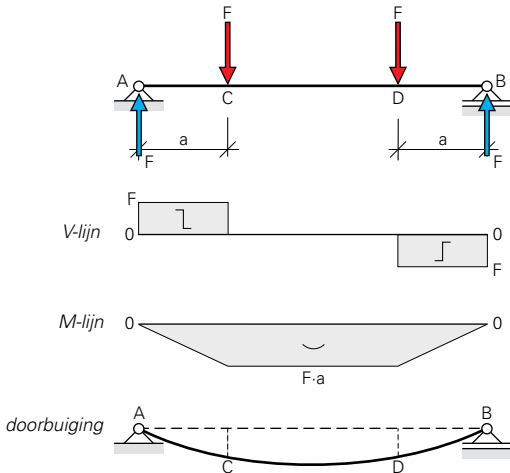
In de rekenvoorbeelden worden de toetsen uitgevoerd volgens de Eurocodes, met name NEN-EN 1993 (EC3 Staalconstructies), NEN-EN 1992 (EC2 Betonconstructies) en NEN-EN 1995 (EC5 Houtconstructies). Het opstellen van de belastingen op constructies gebeurt volgens NEN-EN 1990 (EC0 Grondslagen) en NEN-EN 1991 (EC1 Belastingen). (In België worden de Eurocodes aangeduid met NBN-EN.) Voor het toetsen van de sterkte en het opstellen van de belastingen is het noodzakelijk het volgende te weten:

- wat een veilige constructie is, zie hoofdstuk 14 (Veiligheid en bruikbaarheid);
- welke belastingen er kunnen optreden, zie hoofdstuk 13 (Belastingen);
- hoe belastingen worden gecombineerd, zie hoofdstuk 15 (Belastingcombinaties).

Door een spanning zal een materiaal altijd vervormen (rekken). In de praktijk wordt (bijna) altijd gerekend met een lineair elastisch gedrag tussen spanning en vervorming, zo ook in dit hoofdstuk. De berekening van de vervormingen wordt in hoofdstuk 8 (Vervormingen) beschreven. Constructiematerialen kunnen zich ook plastisch gedragen. Met deze eigenschap wordt in hoofdstuk 9 (Meer complexe spanningstoestanden) gerekend.

7.1 Spanningen zichtbaar gemaakt in een ligger belast op buiging.





7.16 Belaste ligger met zuivere buiging over liggerdeel C-D.

## 7.3 Spanningen door een buigend moment

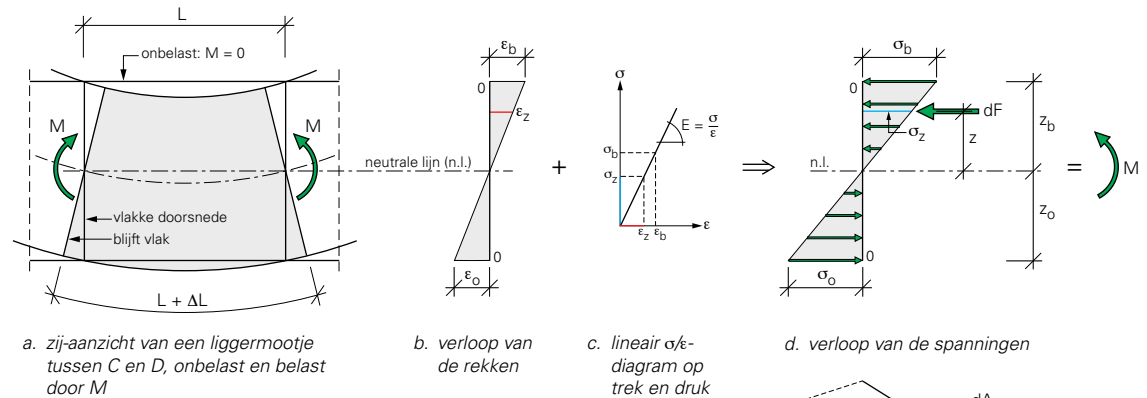
Buigende momenten treden vaak samen op met dwarskrachten. Echter in deze paragraaf wordt uitsluitend het effect van een buigend moment beoordeeld: dat betekent dat over het beschouwde liggerdeel géén dwarskrachten, maar ook geen normaalkrachten of wringende momenten aanwezig zijn.

De belastingtoestand van zuivere buiging ontstaat bijvoorbeeld in een situatie waarbij de ligger wordt belast door vier puntlasten: twee gelijke actiekrachten en twee reactiekrachten (afb. 7.16). Over het liggerdeel waar de dwarskracht nul is, is het buigend moment constant, zie hoofdstuk 4 (Inwendig evenwicht). In liggerdeel C-D treedt zuivere buiging op: elk liggermootje tussen C en D wordt belast op een even groot buigend moment. Omdat elk mootje op dezelfde wijze wordt belast is de doorbuigingslijn over liggerdeel C-D cirkelvormig.

### 7.3.1 Elastische buigspanningen

Een liggermootje buigt doordat in de doorsnede de materiaalvezels naar boven toe worden ingedrukt en naar onder toe worden uitgetrokken (afb. 7.17a). In elke doorsnede die op buiging wordt belast is een laag aanwezig waar de vezels hun oorspronkelijke lengte behouden. Het materiaal wordt in deze laag niet uitgetrokken, maar ook niet ingedrukt. Deze laag heet de neutrale lijn (afgekort tot n.l.) en is in afbeeldingen meestal zichtbaar als een lijn.

In de rechthoekige doorsnede van afbeelding 7.17 ligt de neutrale lijn vanwege symmetrie precies op de halve hoogte van de doorsnede. De neutrale lijn valt samen met het zwaartepunt van de doorsnede.



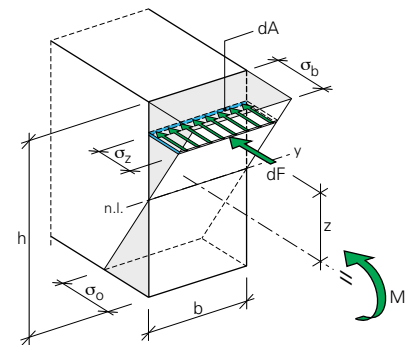
a. zij-aanzicht van een liggermootje tussen C en D, onbelast en belast door M

b. verloop van de rekken

c. lineair  $\sigma/\epsilon$ -diagram op trek en druk

d. verloop van de spanningen

7.17 Vervorming en spanningen door zuivere buiging bij een lineair materiaalgedrag.



## 7.4.1 Schuifspanningen, elastisch

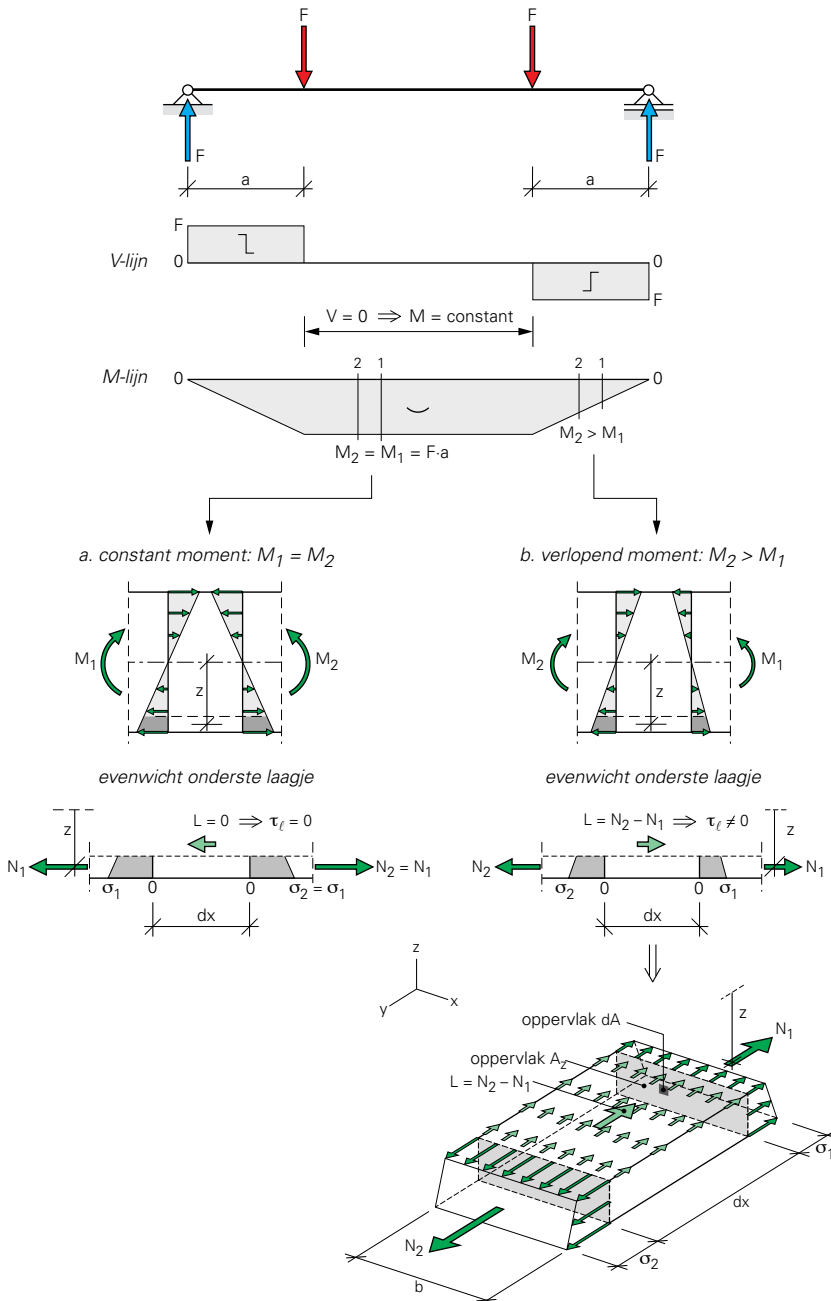
De schuifspanningen in een doorsnede worden berekend met de schuifspanningsformule. Deze formule wordt afgeleid aan de hand van een ligger met een rechthoekige doorsnede, belast door twee puntlasten  $F$ . In afbeelding 7.45 zijn van deze ligger de  $V$ - en  $M$ -lijn getekend. Op twee plaatsen in de doorsnede wordt het ontstaan van schuifspanningen onderzocht, namelijk: in een mootje ligger met een lengte  $dx$  waar het moment constant is (afb. 7.45a) én in een mootje ligger waar het moment verloopt (afb. 7.45b). Aan het verloop van de buigspanningen liggen volgens paragraaf 7.3.1 twee uitgangspunten ten grondslag:

- een vlakke doorsnede blijft na buiging vlak (hypothese van Bernoulli);
- er is een lineair verband tussen spanning en rek (wet van Hooke:  $\sigma = E \cdot \epsilon$ )

Uit deze twee uitgangspunten volgt dat het verloop van de buigspanningen recht evenredig is met de afstand tot de neutrale lijn.

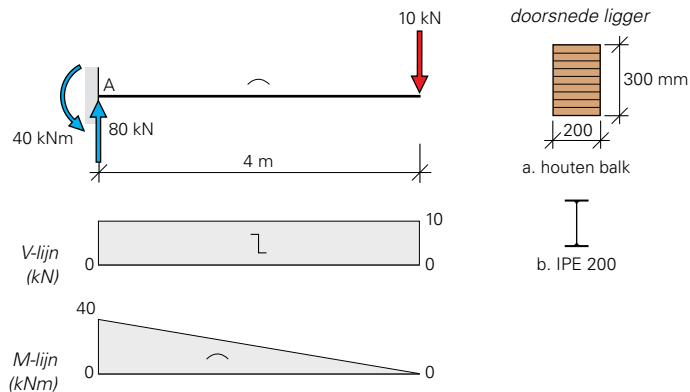
### Liggerdeel waar het moment constant is

Bij het liggerdeel tussen de twee puntlasten is het moment constant en zijn de momenten op een mootje ligger in de snede links en rechts van het mootje even groot:  $M_1 = M_2$  (afb. 7.45a). Dat betekent dat het buigspanningsverloop over de hoogte van de doorsnede links en rechts van het mootje identiek is. In het onderste laagje van het mootje zijn de buigspanningen links en rechts even groot:  $\sigma_1 = \sigma_2$ . En dat betekent dat ook de resulterende normaalkrachtjes (kracht = oppervlakte  $\times$  spanning) in het onderste laagje even groot zijn:  $N_1 = N_2$ . Het onderste laagje is precies in evenwicht, waardoor in het doorgesneden horizontale vlak geen schuifkracht  $L$  aanwezig is ( $L = 0$ ) en dus ook geen langsschuifspanning  $\tau_\ell$ . De conclusie luidt: bij een constant moment  $M$  is de dwarskracht  $V = 0$  én is de langsschuifspanning  $\tau_\ell = 0$ .

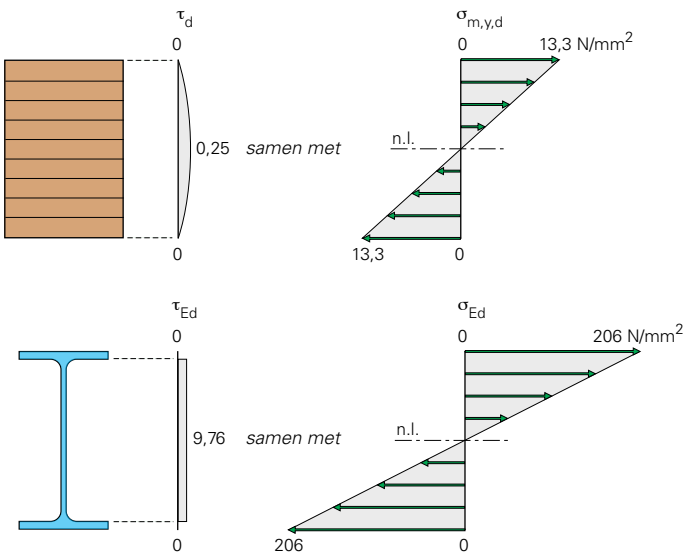


7.45 Langsschuifspanningen ontstaan uitsluitend bij een verlopend moment.

## Voorbeeld 7.14



Combinatie van spanningen door een dwarskracht en een buigend moment in de doorsnede ter plaatse van A:



7.51 Eénzijdig ingeklemde ligger in hout én in staal, belast door een puntlast.

- **Gegeven.** Een éénzijdig ingeklemde ligger in een gebouw wordt op het uiteinde belast door een puntlast  $F_{Ed} = 10 \text{ kN}$ , die kortdurend aanwezig is (afb. 7.51). Aangenomen mag worden dat de ligger niet kipt. De ligger wordt uitgevoerd als gelamineerde ligger, met  $b \times h = 200 \times 300 \text{ mm}$ , én als stalen ligger IPE 200.
- **Gevraagd.** Toets beide liggers op sterkte.
- **Uitwerking.** De toets van de liggers is hier zoveel mogelijk uitgeschreven in de stijl van een berekeningsrapport.

### Uitgangspunten

- houten ligger: – houtsoort: vuren, sterkteklasse GL24h met  $f_{m,y,k} = 24 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{v,k} = 2,7 \text{ N/mm}^2$  en  $\gamma_M = 1,25$  (bijlage C);  
 – modificatiefactor:  $k_{mod} = 0,9$  (binnen droog, relatieve vochtigheid  $\leq 85\%$ ; belastingduur: kort).
- stalen ligger: – staalsoort: S235 met  $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$ , afschuifsterkte =  $0,58f_y \text{ N/mm}^2$  en  $\gamma_{M0} = 1,00$  (bijlage C).

### Krachtsverdeling

Uit de V- en M-lijn blijkt dat de ligger ter plaatse van oplegging A het zwaarst wordt belast: een maximaal buigend moment  $M_{Ed} = 40 \text{ kNm}$  en een maximale dwarskracht  $V_{Ed} = 10 \text{ kN}$  (afb. 7.51). Voor de toets is deze doorsnede maatgevend.

### Toets gelamineerde ligger 200x300 mm

Het buigend moment geeft normaalspanningen volgens formule (7.22) en de dwarskracht geeft schuifspanningen volgens formule (7.34):

$$\text{buiging: } \sigma_{m,y,d} = \frac{M_{Ed}}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^6}{\frac{1}{6} \cdot 200 \cdot 300^2} = 13,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{afschuiving: } \tau_d = 1,5 \frac{V_{Ed}}{A} = 1,5 \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{200 \cdot 300} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

Uit het verloop van de buig- en de schuifspanningen voor de houten ligger blijkt het volgende (afb. 7.51):

- in de uiterste vezels is de buigspanning maximaal en de schuifspanning nul;
- ter plaatse van de neutrale lijn is de schuifspanning maximaal en de buigspanning nul.

Doorsnede A kan dus ‘gewoon’ worden getoetst met twee enkelvoudige toetsen, namelijk: ter plaatse van de uiterste vezels op normaalspanning door het buigend moment, formule (7.26) en ter plaatse van de neutrale lijn op schuifspanning door de dwarskracht, formule (7.36).



# 8

## Vervormingen

Een normaalkracht (trek of druk), een buigend moment en een dwarskracht veroorzaken in de materiaaldoorsnede normaalspanningen en schuifspanningen die altijd leiden tot vervormingen. De vervorming door schuifspanningen bij een dwarskracht is zo klein dat deze te verwaarlozen is. In de praktijk wordt de vervorming door dwarskracht zelden berekend en getoetst.

Door een normaalspanning wordt het materiaal langer of korter. Is de normaalspanning het gevolg van een trek- of een drukkracht dan is de vervorming in het ene geval wel te verwaarlozen en in het andere geval niet. Een kolom in gebouw bijvoorbeeld wordt door een drukkracht korter; deze vervorming is meestal zo klein dat de grootte binnen de bouwtoelanties valt en daarom niet wordt getoetst. Maar wanneer door trek- of drukkrachten elementen doorbuigen is deze vervorming bijna altijd relevant; denk bijvoorbeeld aan de doorbuiging van een brugdek in een tuibrug doordat de op trek belaste tuikabels langer worden.

Een normaalspanning kan ook het gevolg zijn van een buigend moment: liggers buigen dan door en kolommen bijvoorbeeld buigen uit. Deze vervormingen worden altijd beoordeeld.



8.1 Scheuren in metselwerk door zettingsverschillen.

De doorbuiging (en uitbuiging) van een constructie kan leiden tot hinderlijke effecten die de bruikbaarheid beperken. Denk bijvoorbeeld aan een vloer die zoveel doorbuigt – of trilt – dat deze vervorming bij het belopen van de vloer als onaangenaam wordt ervaren. Er kan ook schade ontstaan, zoals scheuren in metselwerk, veroorzaakt door doorbuiging van onderliggende vloeren of balken, temperatuurverandering of zettingsverschillen (afb. 8.1). Doorbuiging kan zelfs tot vergroting van de belasting leiden. Wanneer de regenwaterafvoer van een plat dak niet is gewaarborgd kan door wateraccumulatie de belasting zó groot worden dat instorten het gevolg is (afb. 8.2).

Uit deze voorbeelden blijkt het belang van het toetsen van de doorbuiging. Dit betekent dat er grenzen worden gesteld aan de doorbuiging. Maar welke vervormingen zijn acceptabel? Deze vraag is in de praktijk niet altijd eenvoudig te beantwoorden omdat de omstandigheden te verschillend zijn. Een kritische beoordeling van de situatie waarin de constructie zich bevindt is altijd nodig.

In dit hoofdstuk worden de verplaatsingen berekend van knopen in staafconstructies (eenvoudige vakwerken). Daarnaast wordt de doorbuiging van liggers op twee steunpunten berekend en getoetst aan de gangbare doorbuigings-eisen.

Vervormingen die ontstaan door temperatuurverandering worden in hoofdstuk 9 (Meer complexe spanningstoestanden) beschreven. Door zettingen kunnen steunpuntzakkingen optreden, waardoor extra krachten (en vervormingen) in de constructie kunnen ontstaan, zie hoofdstuk 10 (Statisch onbepaalde constructies).



8.2 Plat dak, lokaal bezwaken door regenwateraccumulatie.

## 8.1 Materiaalgedrag

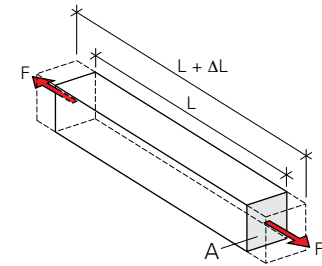
Wanneer op een staaf met een lengte  $L$  een trekkracht  $F$  werkt, wordt de staaf een afstand  $\Delta L$  langer (afb. 8.3a). Deze verlenging  $\Delta L$  hangt af van de staaf lengte  $L$ . Een grotere  $L$  geeft bij een lineair materiaalgedrag een evenredig grotere  $\Delta L$ . Dat betekent dat de verhouding tussen  $\Delta L$  en  $L$  voor elk deel van staaf (of dit deel nu kort of lang is) altijd hetzelfde is. Deze verhouding heet de relatieve verlenging (rek)  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (8.1)$$

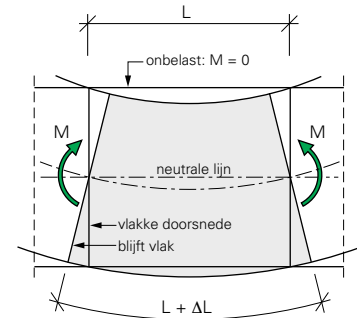
Een rek is dus een verhoudingsgetal. Ook door een buigend moment rekt een materiaal. Volgens de hypothese van Bernoulli is de rek recht evenredig met de afstand tot de neutrale lijn, of anders geformuleerd: een vlakke doorsnede blijft na buiging vlak. In afbeelding 8.3b wordt de uiterste vezel met lengte  $L$  na buiging een afstand  $\Delta L$  langer. Ook nu is de rek:  $\varepsilon = \Delta L/L$ . Hetzelfde geldt voor druk.

Sterkte- en vervormingseigenschappen van een constructiemateriaal worden vastgelegd in een  $\sigma/\varepsilon$ -diagram: dit is bijna altijd een geschematiseerde weergave van het werkelijke materiaalgedrag. In afbeelding 8.4 zijn de takken van de  $\sigma/\varepsilon$ -diagrammen van staal én van beton en hout weergegeven die van belang zijn voor de berekening van de vervorming door trek- en drukspanningen. Beide  $\sigma/\varepsilon$ -diagrammen hebben een lineair elastische tak, terwijl beton en hout bovendien een horizontale tak hebben die de kruipvervorming weergeeft. Beide eigenschappen worden hierna toegelicht.

Vervormingsberekeningen vinden plaats met karakteristieke belastingen, omdat voor het toetsen aan de bruikbaarheidsgrenstoestand de partiële factoren  $\gamma_M = 1,0$  zijn voorgeschreven, zie hoofdstuk 15 (Belastingcombinaties). De belastingen in de vervormingsberekening zijn dus altijd lager dan in de sterkteberekening. Daardoor bevinden de optredende spanningen voor de vervormingsberekening zich (altijd) in de lineair elastische tak van het  $\sigma/\varepsilon$ -diagram.

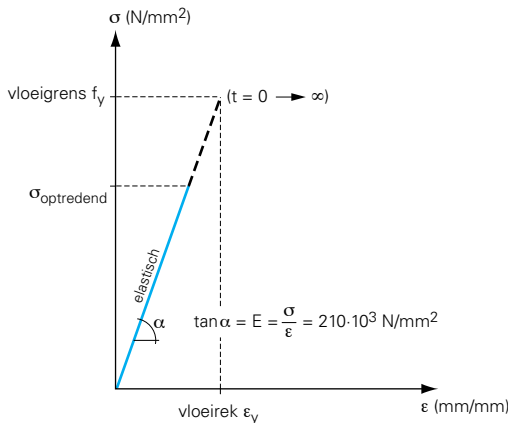


a. verlenging  $\Delta L$  door een trekkracht

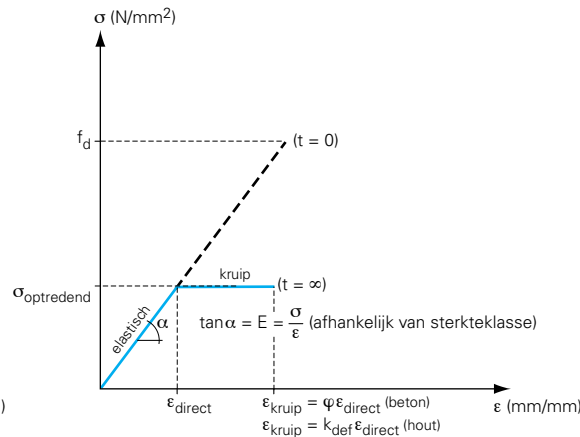


b. verlenging  $\Delta L$  door een buigend moment

8.3 Door belastingen ontstaat vervorming.



a.  $\sigma/\varepsilon$ -diagram van staal



b.  $\sigma/\varepsilon$ -diagram van beton en hout

8.4  $\sigma/\varepsilon$ -diagrammen met een lineair elastische tak én met een tak voor de kruipvervorming.



8.28 Woontoren De StadsHeer in Tilburg. Aan de gevel hanger prefab serres.

8

Aan woontoren De StadsHeer in Tilburg hangen geprefabriceerde serres (afb. 8.28). In hoofdstuk 7, opgave 11 is de staalconstructie van de ophanging (de schoor, de hoekkolom en de randligger van het dak) getoetst op sterkte.

De randliggers van het dak en van de vloer van de serre zijn samengestelde profielen met een traagheidsmoment  $I_y = 349 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$  (afb. 8.29). De trekstang en het hoekprofiel (van het samengestelde randprofiel) zijn gemaakt van de staalsoort S355 en de buisprofielen van de hoekkolom en het samengestelde randprofiel van S275. Het schema van de dakrandligger heeft voor de maatgevende belastingcombinatie de volgende karakteristieke belastingen (afb. 8.30):

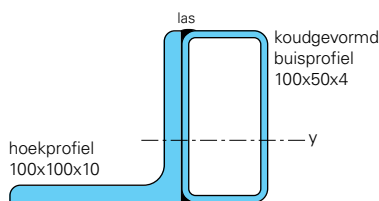
- eigen gewicht stalen dakplaat + isolatie + dakbedekking + randligger  $q_{g,k} = 0,63 \text{ kN/m}$
- veranderlijke belasting sneeuw (incl. ophoping)  $q_{q,k} = 1,50 \text{ kN/m}$

Het schema van de vloerrandligger heeft voor de maatgevende belastingcombinatie de volgende karakteristieke belastingen (afb. 8.31):

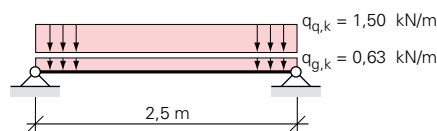
- eigen gewicht betonnen vloerplaat + vloerrandligger + kozijn  $q_{g,k} = 3,80 \text{ kN/m}$
- veranderlijke gebruiksbelasting op de vloer  $q_{q,k} = 3,13 \text{ kN/m}$
- eigen gewicht dak + vloerrandligger + kozijn  $F_{g,k} = 2,13 \text{ kN}$

- a. Toets de doorbuiging van de dakrandligger. De prefab betonnen plaat die op de vloerrandliggers rust is zo buigstijf dat de vloerrandligger door de belastingen  $q_{g,k}$  en  $q_{q,k}$  niet op buiging worden belast. Deze ligger hoeft daarom niet te worden getoetst op doorbuiging.
- b. De architect maakt zich zorgen over een te grote vervorming van de serres en is bang voor schade aan de glazen gevel. Bepaal de verplaatsing van punt D van de vloerrandligger. Stel de architect gerust (of niet).

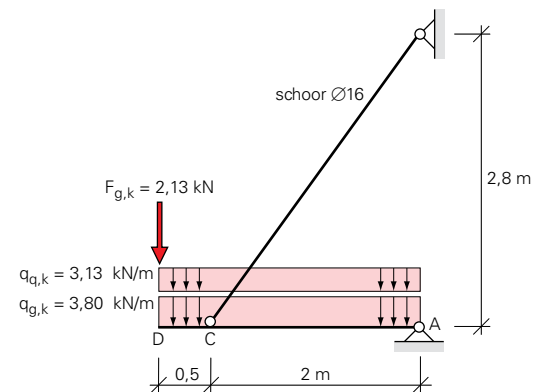
Merk op dat de verplaatsing van punt D vrijwel volledig wordt bepaald door verlenging van de schoor  $\varnothing 16$  én door de buiging van de vloerrandligger door puntlast  $F_{g,k}$ . In de vloerrandligger is over een lengte van 2 m weliswaar een drukkracht aanwezig, maar door de grote oppervlakte van de dwarsdoorsnede is de drukspanning gering en de verkorting te verwaarlozen. Neem in de overweging mee in welke bouwphase het glas wordt geplaatst én of een deel van de vervorming eventueel tijdens de uitvoering kan worden gecorrigeerd omdat de schoor in lengte verstelbaar is.



8.29 Samengesteld randprofiel van een serre.



8.30 Schema van de dakrandligger van de serre.



8.31 Schema van de vloerrandligger van de serre.

# Wiskundige relaties tussen belasting en doorbuiging

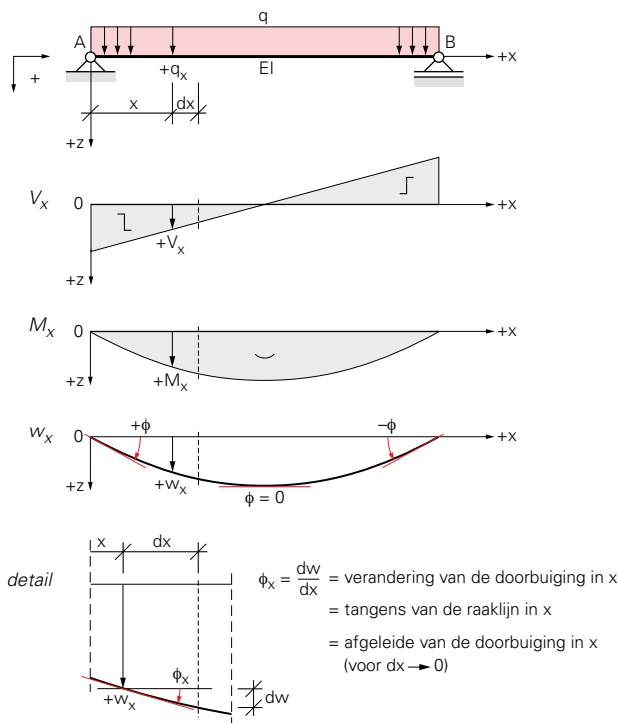
Staven kunnen op drie manieren uitwendig worden belast: *evenwijdig met de staafas, dwars op de staafas én om de staafas*. Liggers worden (meestal) dwars op de staafas belast, waardoor dwarskrachten en buigende momenten in de ligger ontstaan. De ligger zal ook vervormen. Er ontstaan buigstralen, hoekverdraaiingen en de ligger zal doorbuigen. Wiskundig bestaat er een verband tussen de belasting  $q$  dwars op de staafas, de dwarskracht  $V$ , het buigend moment  $M$ , de buigstraal  $R$ , de hoekverdraaiing  $\phi$  en de doorbuiging  $w$  van de ligger. Deze snedekrachten en vervormingen zijn te beschrijven in vergelijkingen en grafisch in 'lijnen' weer te geven. In deze bijlage worden deze verbanden beschreven en de vergelijkingen opgesteld van eenvoudige belastinggevallen. De vergelijkingen komen tot stand door integreren. Door differentiëren kunnen specifieke kenmerken, zoals de maximale waarden, worden bepaald. Kennis van integreren en differentiëren is daarom een vereiste voor het opstellen van de vergelijkingen en voor het begrijpen van de onderlinge relaties.

Uit het wiskundige verband volgt de methode van oppervlaktebepaling, die handig is in de praktijk. Daardoor kan het opstellen van vergelijkingen achterwege blijven. Specifiek voor het berekenen van de hoekverdraaiing en de doorbuiging wordt vanuit deze methode 'de methode van het gereduceerde momentenvlak' afgeleid. Aan de hand van voorbeelden worden beide methoden toegelicht, waarbij tevens een aantal basisgevallen worden afgeleid die 'vergeet-mij-nietjes' worden genoemd, zie bijlage B (Basisbelastinggevallen en 'vergeet-mij-nietjes').

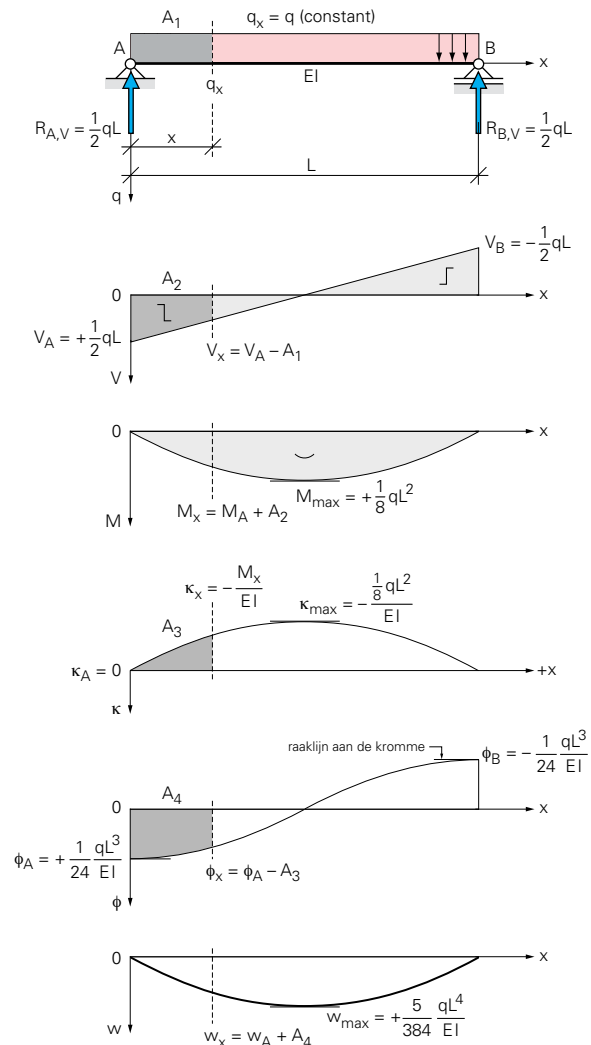
## Positieve richtingen

Allereerst wordt vastgelegd welke richtingen positief worden aangenomen. In afbeelding A.1 wordt een ligger op twee steunpunten belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast. Aan de ligger wordt een  $x/z$ -assenstelsel toegevoegd. De afspraak voor het positieve assenstelsel van de ligger is:

- de oorsprong ligt in A;
- de  $x$ -as ligt evenwijdig aan de staafas (in het zwaartepunt van de doorsnede);
- de  $z$ -as wijst naar beneden (omdat een ligger meestal naar beneden doorbuigt);
- de draairichting voor de hoekverdraaiing is positief vanaf de positieve  $x$ -as naar de positieve  $z$ -as.



A.1 Positieve assenstelsel met een positief respectievelijk negatief verloop van  $q$ ,  $V$ ,  $M$ ,  $\phi$  en  $w$ .



A.5 Vergelijkingen met de grafische weergave van een ligger op twee steunpunten belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast.

Door het invullen van de integratieconstanten  $C_1$  t/m  $C_4$  in de formules (A.12) t/m (A.15) zijn de vergelijkingen van  $V$ ,  $M$ ,  $\phi$  en  $w$  bekend (afb. A.5). Voor  $x = 0$ ,  $x = 0,5L$  en  $x = L$  zijn de bijgeschreven maximale waarden bepaald (ga dit na).

- 1: belasting  $q_x = +q$
- 2: dwarskracht  $V_x = -qx + \frac{1}{2}qL$
- 3: moment  $M_x = -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}qLx$   
 kromming  $\kappa_x = \frac{1}{R_x} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qLx\right)$
- 4: hoekverdraaiing  $\phi_x = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{4}qLx^2 + \frac{1}{24}qL^3\right)$
- 5: doorbuiging  $w_x = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{12}qLx^3 + \frac{1}{24}qL^3x\right)$

Aan de hand van de scharnierend opgelegde ligger van afbeelding A.5 kunnen de volgende conclusies worden getrokken.

1. Elke vergelijking wordt uitgedrukt in  $L$ . De graad van een vergelijking neemt vanaf de belasting, dwarskracht, moment (en kromming), hoekverdraaiing en doorbuiging telkens met één toe. Dat betekent dat de lijn van de doorbuiging:
  - a. vierdegraads is wanneer de belasting  $q$  constant is (en dus resulteert in  $w = \dots qL^4/EI$ );
  - b. derdegraads is wanneer de belasting  $q$  nul is (bij een puntlast, zie par. A.1.3);
  - c. vijfdegraads is bij een trapeziumvormige lijnlast  $q$ .
2. Wanneer de raaklijn horizontaal loopt is de afgeleide nul. Voor een ligger op twee steunpunten is dat het geval ter plaatse van:
  - a.  $w_{\max}$ : de hoekverdraaiing  $\phi = 0$ ;
  - b.  $\phi_{\max}$ : het moment  $M = 0$  en de kromming  $\kappa = 0$  (en de buigstraal  $R = \infty$ );
  - c.  $M_{\max}$ : de dwarskracht  $V = 0$  (en snijdt de  $V$ -lijn).
3. In de praktijk wordt eerst de  $V$ -lijn berekend en getekend en daarna de  $M$ -lijn. Van het gegeven 'waar de  $V$ -lijn de  $0$ -lijn snijdt is het moment maximaal' wordt altijd gebruik gemaakt.

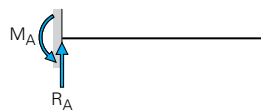
De conclusies 1 en 3 (maar ook 2a en 2b) zijn voor elke ligger van toepassing. Conclusie 2a hangt af van de wijze waarom de ligger is opgelegd.

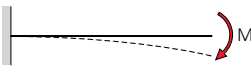
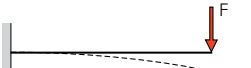
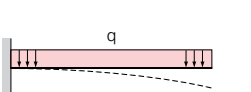
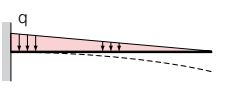
# Basisbelastinggevallen met 'vergeet-mij-nietjes'

Bijlage B bevat de oplegreacties, de hoekverdraaiing en de doorbuiging van veel voorkomende belastinggevallen voor een:

- éézijdig ingeklemde ligger;
- vrij opgelegde ligger op twee steunpunten;
- ligger op twee steunpunten, aan één zijde ingeklemd en de andere zijde vrij opgelegd;
- tweezijdig ingeklemde ligger.

De hoekverdraaiing en doorbuiging van de meest eenvoudige belastinggevallen worden 'vergeet-mij-nietjes' genoemd. Deze belastinggevallen worden in de tabellen B.1 t/m B.4 aangeduid met een \*.



A $\frac{1}{2}L$ C $\frac{1}{2}L$ B	oplegreactie		hoekverdraaiing	doorbuiging
	kraft	moment		
	$R_A = 0$	$M_A = M$	$\phi_B = \frac{ML}{EI}$	$w_B = \frac{ML^2}{2EI}$
	$R_A = F$	$M_A = FL$	$\phi_B = \frac{FL^2}{2EI}$	$w_B = \frac{FL^3}{3EI}$
	$R_A = qL$	$M_A = \frac{1}{2}qL^2$	$\phi_B = \frac{qL^3}{6EI}$	$w_B = \frac{qL^4}{8EI}$
	$R_A = \frac{1}{2}qL$	$M_A = \frac{1}{6}qL^2$	$\phi_B = \frac{qL^3}{24EI}$	$w_B = \frac{qL^4}{30EI}$

B.1 Éézijdig ingeklemde ligger.